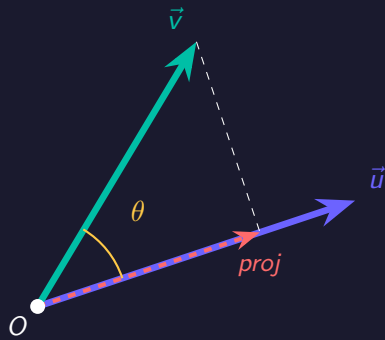


Produit scalaire dans l'espace

Définitions ■ Orthogonalité ■ Normes & distances ■ Plans & droites



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \\ &= xx' + yy' + zz'\end{aligned}$$

Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier le produit scalaire dans l'espace ?	3
1.1	L'outil qui manquait	3
1.2	Les applications	3
1.3	Ce que tu savais déjà	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Mesurer la « ressemblance directionnelle »	4
2.2	Trois façons de voir le même objet	4
3	🎓 Le cours formel	5
3.1	Définition du produit scalaire	5
3.2	Repère orthonormé et expression analytique	5
3.3	Propriétés algébriques du produit scalaire	6
3.4	Norme d'un vecteur et distance	6
3.5	Orthogonalité	7
3.6	Calcul d'angle	8
3.7	Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan	8
3.8	Orthogonalité de droites et plans	10
3.9	Distance d'un point à un plan	10
3.10	Projeté orthogonal	11
3.11	Identités remarquables avec le produit scalaire	11
4	🧰 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	12
5	✎ Exercices	13
6	🔑 Problème — Plans, sphères et projections ★★	15
7	✔ Corrigés détaillés	16

1 ? Pourquoi étudier le produit scalaire dans l'espace ?

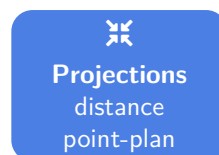
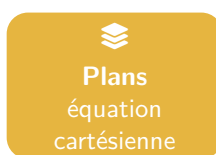
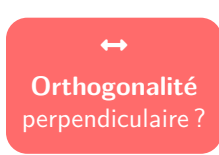
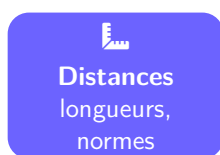
1.1 L'outil qui manquait

Dans la fiche précédente, tu as appris à manipuler des vecteurs de l'espace : les additionner, les multiplier par un scalaire, vérifier la colinéarité et la coplanarité. Mais il te manquait un outil fondamental : la capacité de mesurer des **angles** et des **distances**, et de déterminer si deux vecteurs sont **perpendiculaires**.

Le **produit scalaire** est cet outil. C'est une opération qui prend deux vecteurs et renvoie un **nombre réel** (un scalaire, d'où le nom). Ce nombre contient une information précieuse : il dit « *dans quelle mesure* » les deux vecteurs vont dans la même direction. Si le produit scalaire est positif, les vecteurs forment un angle aigu (ils « vont globalement dans le même sens »). S'il est négatif, l'angle est obtus. Et s'il est nul, les vecteurs sont **perpendiculaires**.

1.2 Les applications

Le produit scalaire est un outil incroyablement puissant. Voici ce qu'il permet de faire au bac :



En particulier, le produit scalaire est **indispensable** pour écrire l'**équation cartésienne d'un plan** (la grande nouveauté de ce chapitre) et pour calculer la **distance d'un point à un plan**, qui sont des classiques absolus du bac.

1.3 Ce que tu savais déjà

En Première, tu as vu le produit scalaire dans le **plan**. Tout ce que tu as appris reste valable dans l'espace — il suffit d'ajouter la troisième coordonnée. Les formules sont les mêmes, avec un terme supplémentaire.

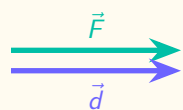
2 L'idée avant la formule

2.1 Mesurer la « ressemblance directionnelle »

Intuition | Que mesure le produit scalaire ?

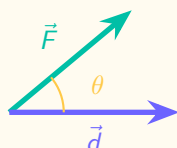
Imagine que tu pousses un meuble avec une force $\vec{F}$ et que le meuble se déplace selon un vecteur $\vec{d}$. Le **travail** de la force (l'énergie effectivement transmise au meuble) n'est pas simplement $\|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\|$. Si tu pousses en biais par rapport au déplacement, une partie de ta force est « gaspillée ».

Le travail est donné par le **produit scalaire** : $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta$, où θ est l'angle entre la force et le déplacement.



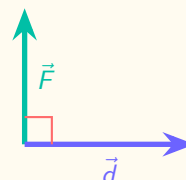
$$\theta = 0, \cos \theta = 1$$

Travail maximal



$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Travail partiel



$$\theta = \frac{\pi}{2}, \cos \theta = 0$$

Travail nul !

C'est exactement ce que fait le produit scalaire en mathématiques : il mesure **combien deux vecteurs vont dans la même direction**.

2.2 Trois façons de voir le même objet

Intuition | Les trois formules du produit scalaire

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ peut se calculer de **trois manières équivalentes**. Chacune est utile dans des situations différentes :

1. **Avec l'angle** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ (utile quand on connaît les longueurs et l'angle).
2. **Avec les coordonnées** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (la formule la plus utilisée au bac !).
3. **Avec les normes** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (formule de polarisation, utile en théorie).

Retiens surtout les deux premières. La formule en coordonnées est celle que tu utiliseras dans 90% des exercices du bac.

3 Le cours formel

3.1 Définition du produit scalaire

Définition | Produit scalaire — définition géométrique

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

où $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \in [0, \pi]$ est l'angle géométrique entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le résultat est un **nombre réel** (un scalaire), pas un vecteur ! C'est la différence majeure avec l'addition de vecteurs.

Intuition | Signe du produit scalaire et angle

Le signe du produit scalaire te renseigne immédiatement sur l'angle :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow$ angle **aigu** (vecteurs « dans le même sens »).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ vecteurs **perpendiculaires**.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos \theta < 0 \Leftrightarrow \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \Leftrightarrow$ angle **obtus** (vecteurs « en sens opposé »).

3.2 Repère orthonormé et expression analytique

Définition | Repère orthonormé (= orthonormal)

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** (ou orthonormal) si les trois vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

Dorénavant, et pour toute la suite de cette fiche, on se place dans un repère orthonormé. C'est le cadre standard du bac.

★ Théorème | Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

C'est **la** formule fondamentale du chapitre. On multiplie les coordonnées correspondantes, puis on additionne les trois produits.

 Démonstration

On développe $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$. Par bilinéarité du produit scalaire :

$$= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + xz'(\vec{i} \cdot \vec{k}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) + \dots$$

Dans un repère orthonormé, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, etc. Tous les termes croisés s'annulent et il reste exactement $xx' + yy' + zz'$. $\square$

 Exemple

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 + 3 \times (-2) = 8 - 5 - 6 = -3$$

Le résultat est négatif : les vecteurs forment un angle obtus ($> 90^\circ$).

3.3 Propriétés algébriques du produit scalaire **Propriété | Propriétés fondamentales**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel λ :

— **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

— **Bilinéarité** : $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

— **Positivité** : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$

En coordonnées, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$.

 Attention | Le produit scalaire n'est PAS un vecteur

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **nombre réel**, pas un vecteur. On ne peut pas écrire $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|$ (la norme d'un nombre n'a pas de sens en tant que norme de vecteur). On ne peut pas non plus additionner un produit scalaire et un vecteur.

Autre piège : $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'a **aucun sens**, car $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre et on ne peut pas faire le produit scalaire d'un nombre avec un vecteur. En revanche, $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ (sans le point) a un sens : c'est le vecteur $\vec{w}$ multiplié par le scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3.4 Norme d'un vecteur et distance **Définition | Norme**

La **norme** (ou longueur) du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

C'est la généralisation directe du théorème de Pythagore en 3D. En 2D, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En 3D, on applique Pythagore deux fois (une fois dans le plan horizontal, une fois pour monter) et on obtient la racine de la somme des trois carrés.

Définition | Distance entre deux points

La **distance** entre $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ est :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple

$A(1, 2, 3)$ et $B(4, -1, 7)$.

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34} \approx 5,83$$

3.5 Orthogonalité

Définition | Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (ou perpendiculaires) si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

En coordonnées : $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

C'est la propriété la plus utilisée du produit scalaire au bac. Dès qu'on te demande si deux droites sont perpendiculaires, si un vecteur est normal à un plan, ou si un angle est droit, la réponse passe **toujours** par un produit scalaire égal à zéro.

Exemple

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + (-3) \times 1 = 3 + 0 - 3 = 0. \text{ Donc } \mathbf{oui}, \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Définition | Droites orthogonales — Droites perpendiculaires

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles sont **perpendiculaires** si elles sont orthogonales **et** sécantes (elles se coupent).

En 3D, deux droites peuvent être orthogonales **sans se couper** (elles sont alors dites « orthogonales non coplanaires »).

3.6 Calcul d'angle

★ Théorème | Angle entre deux vecteurs

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, l'angle $\theta \in [0, \pi]$ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

✂ Méthode | Comment calculer un angle entre deux vecteurs

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (formule analytique).
2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. En déduire $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
4. Trouver θ par valeur connue du cosinus ou à la calculatrice ($\theta = \arccos(\dots)$).

💡 Exemple | Angle entre deux vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 1 + 0 = 1. \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}. \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Donc } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (soit } 60^\circ \text{)}.$$

3.7 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

C'est la **grande nouveauté du chapitre** et l'un des points les plus importants de l'année pour le bac.

☰ Définition | Vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ (non nul) est **normal** au plan $\mathcal{P}$ s'il est **orthogonal à tout vecteur** contenu dans $\mathcal{P}$. Concrètement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs (non colinéaires) de $\mathcal{P}$, alors $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

🧠 Intuition | Visualiser le vecteur normal

Imagine un plan posé sur une table (horizontal). Le vecteur normal est le vecteur qui « sort » perpendiculairement de la table, comme un piquet planté verticalement. Tout vecteur « couché » sur la table (contenu dans le plan) est perpendiculaire à ce piquet.

Le vecteur normal caractérise la « direction perpendiculaire » au plan. Tout multiple non nul de $\vec{n}$ est également normal au plan.

★ Théorème | Équation cartésienne d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

En développant, on obtient l'équation cartésienne du plan :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$)

définit un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration

Un point $M(x, y, z)$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est contenu dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$. $\square$

Exemple | Trouver l'équation d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1, 2, -1)$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donne : $3(x - 1) + (-1)(y - 2) + 2(z - (-1)) = 0$

$3x - 3 - y + 2 + 2z + 2 = 0$, soit : $3x - y + 2z + 1 = 0$.

Vérification : $A(1, 2, -1)$ doit vérifier l'équation : $3(1) - 2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 - 2 + 1 = 0 \checkmark$.

Méthode | Lire l'équation cartésienne d'un plan

À partir de $ax + by + cz + d = 0$, tu peux **immédiatement** lire :

— Le vecteur normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (ce sont les coefficients de x, y, z).

— Un point du plan : il suffit de trouver un triplet (x, y, z) qui vérifie l'équation. Le plus simple est souvent de fixer deux coordonnées à 0 et de résoudre la troisième.

Inversement, pour **écrire** l'équation cartésienne, il te faut un vecteur normal et un point du plan.

⚠ Attention | L'équation cartésienne n'est pas unique

L'équation $3x - y + 2z + 1 = 0$ et l'équation $6x - 2y + 4z + 2 = 0$ définissent **le même plan** (la seconde est le double de la première). On peut toujours multiplier l'équation par une constante non nulle.

3.8 Orthogonalité de droites et plans

📖 Définition | Droite orthogonale à un plan

Une droite d est **orthogonale** (ou perpendiculaire) au plan $\mathcal{P}$ si le vecteur directeur de d est un **vecteur normal** de $\mathcal{P}$.

Autrement dit : $d \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow$ le vecteur directeur de d est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

✅ Propriété | Plans parallèles et perpendiculaires

Soient $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

— $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \exists \lambda, \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$.

— $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

3.9 Distance d'un point à un plan

★ Théorème | Distance d'un point à un plan

Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque. La **distance** de M_0 au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

✎ Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{P}$ (le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M_0). Alors $\overrightarrow{HM_0}$ est parallèle au vecteur normal $\vec{n}$, et la distance est $d = \|\overrightarrow{HM_0}\|$.

Soit A un point quelconque de $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}$. Comme $\overrightarrow{AH}$ est dans le plan, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$. Et $\overrightarrow{HM_0} = \lambda \vec{n}$ pour un certain λ , donc $\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = \lambda \|\vec{n}\|^2$.

On a également $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$ (car $ax_A + by_A + cz_A = -d$).

Donc $d = |\lambda| \|\vec{n}\| = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. □

💡 Exemple

Distance du point $M_0(1, 3, -2)$ au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 1 = 0$:

$$d = \frac{|2(1) - 1(3) + 2(-2) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2 - 3 - 4 - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

3.10 Projeté orthogonal

Définition | Projeté orthogonal sur un plan

Soit M_0 un point et $\mathcal{P}$ un plan. Le **projeté orthogonal** H de M_0 sur $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ tel que $(M_0H) \perp \mathcal{P}$. C'est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M_0 .

Méthode | Trouver le projeté orthogonal

1. La droite (M_0H) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, donc son vecteur directeur est $\vec{n}$.
2. Écrire la représentation paramétrique de cette droite : $M = M_0 + t\vec{n}$.
3. Substituer dans l'équation du plan $\mathcal{P}$ pour trouver t .
4. En déduire les coordonnées de H .

Exemple

Projeté de $M_0(3, 1, 4)$ sur $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$.

Droite (M_0H) : vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, paramétrisation $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

Substitution dans $\mathcal{P}$: $(3 + t) + 2(1 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$, soit $3 + t + 2 + 4t - 4 + t + 1 = 0$, d'où $6t + 2 = 0$, $t = -\frac{1}{3}$.

$H = \left(3 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}, 4 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

3.11 Identités remarquables avec le produit scalaire

Propriété | Formules de polarisation et identités utiles

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ (identité remarquable $a^2 - b^2$)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Ces formules sont les analogues vectoriels des identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ etc., en remplaçant la multiplication par le produit scalaire et le carré par la norme au carré.

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Check-list produit scalaire

Je veux. . .	J'utilise. . .
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$	$xx' + yy' + zz'$
Calculer la norme de $\vec{u}$	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Calculer la distance AB	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
Vérifier $\vec{u} \perp \vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$?
Trouver l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$
Équation cartésienne d'un plan	$\vec{n} \perp \text{point} \rightarrow ax + by + cz + d = 0$
Distance point-plan	$\frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Projeté orthogonal sur plan	Droite passant par M_0 , dir. $\vec{n}$, substituer
Plans parallèles ?	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (colinéaires)
Plans perpendiculaires ?	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Oublier la valeur absolue** dans la formule de distance point-plan. Le résultat doit toujours être **positif** !
2. **Confondre vecteur directeur et vecteur normal**. Le vecteur normal est **perpendiculaire** au plan, pas contenu dedans.
3. **Se tromper de signe** dans l'équation cartésienne. Vérifie toujours en substituant un point connu du plan.
4. **Oublier le $+d$** dans $ax + by + cz + d = 0$: le d est le terme constant, il faut le calculer !
5. **Croire que droites orthogonales = droites perpendiculaires**. En 3D, il faut aussi qu'elles se coupent pour être perpendiculaires.

5 Exercices

Exercice 1 — Produits scalaires et normes

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
- Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$.
- Parmi ces vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

Exercice 2 — Distances

$$A(1, -2, 3), B(4, 2, -1), C(0, 1, 5).$$

- Calculer AB , AC , BC .
- Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

Exercice 3 — Angles entre vecteurs

$$\text{a) Calculer l'angle entre } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) Calculer l'angle entre } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) Calculer l'angle } \widehat{BAC} \text{ avec } A(0, 0, 0), B(1, 2, 2), C(2, 1, -2).$$

Exercice 4 — Équations cartésiennes de plans

$$\text{a) Déterminer l'équation du plan } \mathcal{P}_1 \text{ passant par } A(2, -1, 3) \text{ de vecteur normal } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) Déterminer l'équation du plan } \mathcal{P}_2 \text{ passant par } B(0, 0, 5) \text{ de vecteur normal } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) Le point } C(3, 1, 0) \text{ appartient-il à } \mathcal{P}_1 ?$$

$$\text{d) Donner un vecteur normal et un point du plan } \mathcal{P}_3 : 2x - 3y + z - 7 = 0.$$

Exercice 5 — Plans parallèles et perpendiculaires

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0, \mathcal{P}_2 : 4x - 2y + 6z + 5 = 0, \mathcal{P}_3 : 3x + 2y + z - 4 = 0.$$

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont-ils parallèles ? Confondus ?
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont-ils perpendiculaires ?
- Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_4$ parallèle à $\mathcal{P}_1$ passant par le point $D(1, 0, -2)$.

Exercice 6 — Distance point-plan

- Distance de $M(3, -1, 2)$ au plan $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + 3 = 0$.
- Distance de l'origine $O(0, 0, 0)$ au plan $\mathcal{Q} : 3x - 4y + 5 = 0$.
- Pour quelle valeur de k le point $A(1, k, 2)$ est-il dans le plan $2x - y + 3z - 4 = 0$?

Exercice 7 ★★☆☆ — **Projeté orthogonal**

Soit $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 3 = 0$ et $M_0(1, 0, 1)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de M_0 sur $\mathcal{P}$.
- Calculer la distance M_0H .
- Vérifier à l'aide de la formule de distance point-plan.

Exercice 8 ★★☆☆ — **Équation cartésienne par trois points**

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déterminer un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal au plan (ABC) en résolvant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) .
- Vérifier que A , B , C satisfont cette équation.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Intersection droite-plan (équation cartésienne)**

Droite $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ et plan $\mathcal{P} : x + y + z - 6 = 0$.

- d est-elle parallèle à $\mathcal{P}$? (le vecteur directeur est-il orthogonal au vecteur normal?)
- Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 10 ★★☆☆ — **Sphère et plan**

La sphère $\mathcal{S}$ a pour centre $\Omega(1, 2, -1)$ et rayon $R = 3$.

- Écrire l'équation de $\mathcal{S}$.
- Déterminer la distance de Ω au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 1 = 0$.
- En déduire la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{S}$ (sécant, tangent, extérieur?).

Exercice 11 ★★★ — **Identités et démonstrations**

- Démontrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- Démontrer l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Quand y a-t-il égalité?

Exercice 12 ★★★ — **Plan médiateur**

Soient $A(1, 2, 3)$ et $B(5, -2, 7)$.

- Déterminer le milieu I de $[AB]$.
- Déterminer l'équation cartésienne du plan Π médiateur de $[AB]$ (plan passant par I et perpendiculaire à (AB)).
- Vérifier que tout point M du plan Π vérifie $MA = MB$.

6 🐼 Problème — Plans, sphères et projections ★★

🔥 Problème style prépa

Ce problème étudie les interactions entre un plan, une sphère et une droite dans l'espace. On y met en œuvre la plupart des outils du chapitre : équation cartésienne, distance point-plan, projection, intersection.

On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + 2y + 2z - 9 = 0$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(3, 1, 2)$ et de rayon $R = 3$.

Partie A — Le plan $\mathcal{P}$

1. Donner un vecteur normal et un point de $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance $d(\Omega, \mathcal{P})$ du centre de la sphère au plan.
3. $\mathcal{P}$ coupe-t-il $\mathcal{S}$? Si oui, décrire l'intersection (nature, centre, rayon).

Partie B — Projection et symétrie

4. Déterminer le projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{P}$.
5. Déterminer le symétrique Ω' de Ω par rapport au plan $\mathcal{P}$.
6. Calculer $\Omega\Omega'$.

Partie C — Intersection droite-sphère

Soit d la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. Écrire la représentation paramétrique de d .
8. Déterminer les points d'intersection de d et $\mathcal{S}$ en résolvant $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$.
9. Calculer la longueur de la corde découpée par la sphère sur la droite d .
10. **(Bonus)** Vérifier que la droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

7 Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

- a) On applique la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ pour chaque couple :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times (-3) = 3 - 4 - 6 = -7$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times 2 + (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 6 - 2 + 2 = 6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \times 2 + 4 \times 2 + (-3) \times 1 = 2 + 8 - 3 = 7$$

- b) On applique $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 16 + 9} = \sqrt{26} \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

- c) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Ici, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7 \neq 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 6 \neq 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 7 \neq 0$. **Aucune paire n'est orthogonale.**

Corrigé — Exercice 2

- a) On calcule chaque distance :

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$

$$AC = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-2))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (1-2)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{16+1+36} = \sqrt{53}$$

- b) Le triangle ABC est rectangle si et seulement si le théorème de Pythagore est vérifié pour l'un des trois sommets. Vérifions les trois possibilités :

$$AB^2 + AC^2 = 41 + 14 = 55 \neq 53 = BC^2 \quad \times$$

$$AB^2 + BC^2 = 41 + 53 = 94 \neq 14 = AC^2 \quad \times$$

$$AC^2 + BC^2 = 14 + 53 = 67 \neq 41 = AB^2 \quad \times$$

Aucune égalité de Pythagore n'est vérifiée, donc le triangle ABC n'est **pas rectangle**.

On peut aussi vérifier directement : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-1) + 4 \times 3 + (-4) \times 2 = -3 + 12 - 8 = 1 \neq 0$, donc l'angle en A n'est pas droit. De même pour les autres.

Corrigé — Exercice 3

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 1 + 0 = 1$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$. $\cos \theta = \frac{1}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ (60°).

- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 0 + 0 = 1$. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$. $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7^\circ$.

- c) Les vecteurs sont $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 + 2 - 4 = 0. \text{ Le produit scalaire est nul, donc } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} \text{ (angle droit).}$$

Corrigé — Exercice 4

- a) $\mathcal{P}_1$ passe par $A(2, -1, 3)$, normal $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$1(x-2) + 2(y+1) + (-1)(z-3) = 0, \text{ soit } x - 2 + 2y + 2 - z + 3 = 0, \text{ d'où } x + 2y - z + 3 = 0.$$

$$\text{Vérification : } 2 + 2(-1) - 3 + 3 = 0 \quad \checkmark.$$

« Le produit scalaire mesure combien deux vecteurs vont dans la même direction. »

b) $\mathcal{P}_2$ passe par $B(0, 0, 5)$, normal $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 5) = 0, \text{ soit } z - 5 = 0, \text{ ou encore } z = 5.$$

C'est le plan horizontal à l'altitude $z = 5$.

c) $C(3, 1, 0)$ dans $\mathcal{P}_1$? On substitue : $3 + 2(1) - 0 + 3 = 3 + 2 + 3 = 8 \neq 0$. Donc $C \notin \mathcal{P}_1$.

d) $\mathcal{P}_3 : 2x - 3y + z - 7 = 0$. Vecteur normal : $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un point : posons $y = z = 0$, alors $2x = 7$, soit $x = \frac{7}{2}$. Le point $(\frac{7}{2}, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{P}_3$.

Corrigé — Exercice 5

a) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$. Les normaux sont colinéaires, donc $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$.

Confondus ? Prenons un point de $\mathcal{P}_1$, par exemple $(0, 0, \frac{1}{3})$ (car $-1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$). Substituons dans $\mathcal{P}_2 : 0 - 0 + 6 \times \frac{1}{3} + 5 = 2 + 5 = 7 \neq 0$. Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont **parallèles et distincts**.

b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 3 \times 1 = 6 - 2 + 3 = 7 \neq 0$. Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ ne sont **pas perpendiculaires**.

c) $\mathcal{P}_4 \parallel \mathcal{P}_1$ signifie même vecteur normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\mathcal{P}_4$ passe par $D(1, 0, -2)$:

$$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z + 2) = 0, \text{ soit } 2x - y + 3z + 4 = 0.$$

Vérification : $2 - 0 - 6 + 4 = 0 \checkmark$. Donc $\mathcal{P}_4 : 2x - y + 3z + 4 = 0$.

Corrigé — Exercice 6

a) $d = \frac{|1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-2) \times 2 + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|3-2-4+3|}{3} = \frac{|0|}{3} = 0$.

Distance 0 signifie que M est **dans le plan** $\mathcal{P}$. On peut vérifier : $3 + 2(-1) - 2(2) + 3 = 0 \checkmark$.

b) $d = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{9+16+0}} = \frac{5}{5} = 1$.

c) $A(1, k, 2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(1) - k + 3(2) - 4 = 0$, soit $2 - k + 6 - 4 = 0$, d'où $4 - k = 0$, et $k = 4$.

Corrigé — Exercice 7

a) Normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Droite par $M_0(1, 0, 1)$ de direction $\vec{n} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

Substitution dans $\mathcal{P} : 2(1 + 2t) + (t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0$, soit $2 + 4t + t - 2 + 4t + 3 = 0$, d'où $9t + 3 = 0$, $t = -\frac{1}{3}$.

$$H = \left(1 - \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

b) $M_0H = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

c) Formule directe : $d = \frac{|2(1)+0-2(1)+3|}{3} = \frac{|2-2+3|}{3} = \frac{3}{3} = 1 \checkmark$.

Corrigé — Exercice 8

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$:

$$\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \quad . \text{ De (1) : } a = 2b. \text{ De (2) : } a = 3c, \text{ donc } c = \frac{a}{3} = \frac{2b}{3}.$$

Prenons $b = 3$: $a = 6$, $c = 2$. Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Vérification : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -6 + 6 + 0 = 0 \checkmark$, $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -6 + 0 + 6 = 0 \checkmark$.

c) $\mathcal{P}$ passe par $A(1, 0, 0)$: $6(x - 1) + 3y + 2z = 0$, soit $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

d) A : $6 - 6 = 0 \checkmark$. B : $0 + 6 + 0 - 6 = 0 \checkmark$. C : $0 + 0 + 6 - 6 = 0 \checkmark$.

Corrigé — Exercice 9

a) Vect. dir. de d : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normal de $\mathcal{P}$: $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$. Donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, ce qui signifie que d n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$.

b) Substituons la paramétrisation de d dans l'équation de $\mathcal{P}$: $(2 + t) + (1 - t) + (3 + 2t) - 6 = 0$, soit $2t = 0$, d'où $t = 0$.

Le point d'intersection est $M = (2, 1, 3)$.

Corrigé — Exercice 10

a) $\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

b) $d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|2(1) - 1(2) + 2(-1) - 1|}{3} = \frac{|2 - 2 - 2 - 1|}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

c) $d(\Omega, \mathcal{P}) = 1 < R = 3$. Donc $\mathcal{P}$ est **sécant** à $\mathcal{S}$. L'intersection est un **cercle** de centre H (projeté de Ω sur $\mathcal{P}$) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$.

Corrigé — Exercice 11

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. $\square$

b) On isole $\vec{u} \cdot \vec{v}$: $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, d'où la formule. $\square$

c) On sait que $\cos \theta \in [-1, 1]$. Donc $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \theta| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Égalité si $|\cos \theta| = 1$, i.e. $\theta = 0$ ou π , i.e. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**. $\square$

Corrigé — Exercice 12

a) $I = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{3+7}{2} \right) = (3, 0, 5)$.

b) Le plan Π est perpendiculaire à (AB) et passe par I . Un vecteur normal à Π est $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, qu'on

simplifie en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation : $1(x-3) - 1(y-0) + 1(z-5) = 0$, soit $x - y + z - 8 = 0$.

Vérification : $I = (3, 0, 5)$ donne $3 - 0 + 5 - 8 = 0 \checkmark$.

c) Soit $M(x, y, z) \in \Pi$, donc $x - y + z - 8 = 0$.

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9$$

$$MB^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 14z + 49$$

$$MA^2 - MB^2 = (-2x + 10x) + (-4y - 4y) + (-6z + 14z) + (14 - 78) = 8x - 8y + 8z - 64 \\ = 8(x - y + z - 8) = 8 \times 0 = 0. \text{ Donc } MA^2 = MB^2, \text{ i.e. } MA = MB. \square$$

Corrigé — Problème

Partie A

1. Normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un point : en posant $y = z = 0$, $x = 9$. Le point $(9, 0, 0) \in \mathcal{P}$.

$$2. d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|3+2(1)+2(2)-9|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|3+2+4-9|}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Le centre Ω est **dans le plan** $\mathcal{P}$! Vérification : $3 + 2 + 4 - 9 = 0 \checkmark$.

3. Comme $\Omega \in \mathcal{P}$ et $R = 3 > 0$, le plan passe par le centre de la sphère. L'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est un **grand cercle** de $\mathcal{S}$: un cercle de centre Ω et de rayon $R = 3$.

Partie B

4. Comme $\Omega \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ est Ω lui-même : $H = \Omega = (3, 1, 2)$.

5. Le symétrique Ω' vérifie $H = \frac{\Omega + \Omega'}{2}$, donc $\Omega' = 2H - \Omega$. Comme $H = \Omega$, $\Omega' = \Omega = (3, 1, 2)$. Le symétrique de Ω par rapport à $\mathcal{P}$ est Ω lui-même, ce qui est logique puisque Ω est dans le plan.

$$6. \Omega\Omega' = 0.$$

Partie C

$$7. d : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

8. On substitue dans l'équation de $\mathcal{S}$: $(t-3)^2 + (2t-1)^2 + (2t-2)^2 = 9$.

Développons : $t^2 - 6t + 9 + 4t^2 - 4t + 1 + 4t^2 - 8t + 4 = 9$, soit $9t^2 - 18t + 14 = 9$, d'où $9t^2 - 18t + 5 = 0$.

$$\Delta = 324 - 180 = 144, \sqrt{\Delta} = 12. t = \frac{18 \pm 12}{18}, \text{ donc } t_1 = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \text{ et } t_2 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Points d'intersection :

$$M_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ et } M_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$9. M_1M_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+64+64}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{12}{3} = 4.$$

10. Vecteur directeur de d : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normal de $\mathcal{P}$: $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On constate que $\vec{u} = \vec{n}$! Donc d est dirigée

par le vecteur normal de $\mathcal{P}$, ce qui signifie que d est **perpendiculaire** à $\mathcal{P}$.

Interprétation géométrique : la droite d passe par l'origine, est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passe par le centre Ω de la sphère (car $\Omega \in \mathcal{P}$ et $d \perp \mathcal{P}$ au point Ω ... vérifions : $\Omega(3, 1, 2)$ donne $t = 3$ dans d , mais $y = 2(3) = 6 \neq 1$. Donc $\Omega \notin d$).

En fait, d est une droite perpendiculaire au plan qui coupe la sphère en deux points. La corde $[M_1M_2]$ a une longueur de 4, ce qui est inférieur au diamètre $2R = 6$, ce qui est cohérent car d ne passe pas par le centre de la sphère. $\square$

Fin de la Fiche 3 — Produit scalaire dans l'espace

Tu maîtrises maintenant : le produit scalaire, la norme et les distances, l'orthogonalité, les angles, l'équation cartésienne d'un plan, les vecteurs normaux, la distance point-plan et la projection orthogonale.

Ces outils seront essentiels pour l'étude des droites et plans de l'espace (Fiche 4).

→ Prochaine fiche : Droites et plans de l'espace.

« Le produit scalaire mesure combien deux vecteurs vont dans la même direction. »