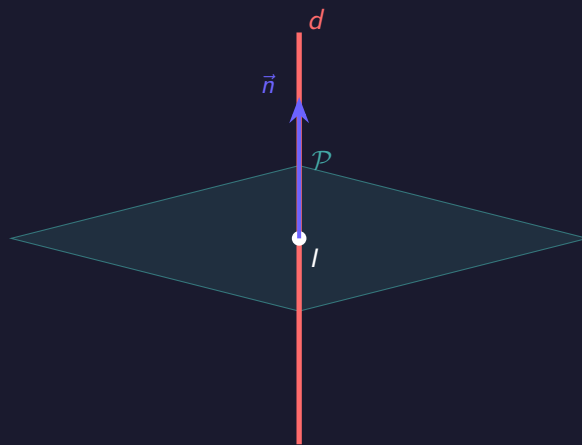


Droites et plans de l'espace

Positions relatives ■ Intersections ■ Parallélisme ■ Orthogonalité



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	 Pourquoi étudier les droites et plans de l'espace ?	3
1.1	Le chapitre de synthèse	3
1.2	Un classique absolu du bac	3
1.3	La grande différence avec le plan	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Les deux langages de la géométrie analytique	4
2.2	La stratégie générale pour les intersections	4
3	 Le cours formel	6
3.1	Rappels : caractériser droites et plans	6
3.2	Positions relatives de deux droites	7
3.3	Positions relatives d'une droite et d'un plan	9
3.4	Positions relatives de deux plans	11
3.5	Théorèmes de parallélisme et d'orthogonalité	12
3.6	Intersection de trois plans	13
3.7	Distance d'un point à une droite	14
4	 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	 Exercices	16
6	 Problème — Géométrie d'un tétraèdre régulier ★★ ★	18
7	 Corrigés détaillés	19

1 ? Pourquoi étudier les droites et plans de l'espace ?

1.1 Le chapitre de synthèse

Ce chapitre est le **cœur** de la géométrie analytique dans l'espace. C'est ici que tous les outils que tu as accumulés dans les fiches précédentes — vecteurs (Fiche 2), produit scalaire, équations cartésiennes, normes et distances (Fiche 3) — se combinent pour résoudre des problèmes géométriques complets et concrets.

La question fondamentale est celle des **positions relatives** : comment deux droites, une droite et un plan, ou deux plans, peuvent-ils se situer l'un par rapport à l'autre dans l'espace ? Se coupent-ils ? Sont-ils parallèles ? Perpendiculaires ? Et s'ils se coupent, **où** se coupent-ils exactement ?

1.2 Un classique absolu du bac

Les exercices de géométrie dans l'espace tombent **quasi-systématiquement** au bac de Terminale. Ils combinent typiquement les opérations suivantes : écrire l'équation d'un plan, déterminer la représentation paramétrique d'une droite, calculer un point d'intersection, vérifier un parallélisme ou une orthogonalité, et calculer une distance ou un angle. Ce chapitre te donne les méthodes pour chacun de ces problèmes.

1.3 La grande différence avec le plan

Intuition | L'espace, c'est plus riche que le plan !

Dans le **plan** (la 2D), deux droites sont soit parallèles, soit sécantes. C'est tout.

Dans l'**espace** (la 3D), il existe une troisième possibilité, totalement nouvelle : deux droites peuvent être **non coplanaires**. Elles ne se croisent pas et ne sont pas parallèles. Elles « se ratent » complètement dans l'espace, comme une route sur terre et un câble électrique dans les airs : même direction différente, ils ne se rencontrent jamais. On les appelle parfois **droites gauches**.

Autre nouveauté : deux plans non parallèles se coupent toujours le long d'une **droite**, et non en un seul point. C'est logique si tu y réfléchis : deux feuilles de papier posées l'une contre l'autre se touchent le long d'une ligne.



**Positions
relatives**
4 cas pour
2 droites



Intersections
droite/plan
plan/plan



Parallélisme
théorèmes
fondamentaux



Orthogonalité
droite $\perp$ plan
théorème du toit

2 L'idée avant la formule

2.1 Les deux langages de la géométrie analytique

Avant de plonger dans les définitions, il est essentiel de comprendre qu'on dispose de **deux façons différentes** de décrire les objets géométriques. Chaque langage a ses avantages, et savoir passer de l'un à l'autre est une compétence clé.

Intuition | Les deux descriptions d'un plan

Équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$.

— *Avantage* : une seule équation, très compacte. On lit immédiatement le vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

— *Avantage* : très pratique pour tester si un point est dans le plan (on substitue ses coordonnées).

— *Utilisation idéale* : plans parallèles, perpendiculaires, distance point-plan.

Représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_A + sa + tb' \\ y = y_A + sb + tc' \\ z = z_A + sc + td' \end{cases} \quad \text{avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

— *Avantage* : on voit directement le point A et les vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$.

— *Avantage* : permet de « générer » des points du plan en choisissant des valeurs de s et t .

— *Utilisation idéale* : définir un plan par 3 points, appartenance d'un point.

Intuition | La description d'une droite

Pour une **droite**, on utilise presque toujours la **représentation paramétrique** (point + vecteur directeur + un paramètre t). Mais une droite peut aussi être vue comme l'**intersection de deux plans**, c'est-à-dire le système de deux équations cartésiennes. Ce deuxième point de vue sera utilisé dans la section sur l'intersection de deux plans.

2.2 La stratégie générale pour les intersections

Intuition | Recette universelle pour les problèmes d'intersection

Face à un problème d'intersection (droite/plan, plan/plan, droite/droite), la méthode est toujours la même :

1. **Écrire les équations** de chaque objet (paramétrique pour les droites, cartésienne pour les plans).
2. **Substituer** les expressions paramétriques dans les équations cartésiennes.
3. **Résoudre** le système obtenu.
4. **Interpréter** :
 - **Aucune solution** $\Rightarrow$ pas d'intersection (parallèles stricts ou non coplanaires).
 - **Une solution unique** $\Rightarrow$ intersection en un seul point.

— **Infinité de solutions** $\Rightarrow$ intersection le long d'une droite (ou d'un plan si confondus).
C'est cette méthode que tu vas appliquer systématiquement dans toute la fiche.

3 Le cours formel

3.1 Rappels : caractériser droites et plans

Définition | Rappel — Représentation paramétrique d'une droite

Soit d la droite passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (non nul).

Un point $M(x, y, z)$ appartient à d si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$d : \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Le réel t est le **paramètre**. Pour $t = 0$, on retrouve le point A .

Définition | Rappel — Équation cartésienne d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (non nul), passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Réciproquement, dans toute équation $ax + by + cz + d = 0$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$), les coefficients a, b, c sont les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Méthode | Passage paramétrique $\leftrightarrow$ cartésienne pour un plan

Paramétrique $\rightarrow$ cartésienne :

1. Lire les deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la représentation paramétrique.
2. Trouver un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en résolvant le système $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$. C'est un système de 2 équations à 3 inconnues. On fixe une inconnue (par exemple $c = 1$) et on résout les deux autres.
3. Calculer d en substituant un point connu dans $ax + by + cz + d = 0$.

Cartésienne $\rightarrow$ paramétrique :

1. Trouver un point A du plan (fixer deux coordonnées, résoudre la troisième).
2. Trouver deux vecteurs directeurs en cherchant deux solutions particulières de $ax + by + cz = 0$ (l'équation *homogène* associée).
3. Vérifier que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, puis écrire la représentation paramétrique.

💡 Exemple | Passage cartésienne → paramétrique

Soit $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 6 = 0$. Trouvons un point et deux vecteurs directeurs.

Un point : posons $y = z = 0$. Alors $2x = 6$, soit $x = 3$. Donc $A(3, 0, 0) \in \mathcal{P}$.

Deux vecteurs directeurs : on cherche $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $2x - y + 3z = 0$.

— Fixons $y = 2, z = 0$: $2x = 2$, $x = 1$. Donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— Fixons $y = 0, z = 2$: $2x = -6$, $x = -3$. Donc $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vérifions que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{0}$ (pas de rapport commun). ✓

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 3 + s - 3t \\ y = 2s \\ z = 2t \end{cases}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

Vérification : $2(3 + s - 3t) - (2s) + 3(2t) - 6 = 6 + 2s - 6t - 2s + 6t - 6 = 0$ ✓.

3.2 Positions relatives de deux droites

Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 se trouvent dans l'une des **quatre** configurations suivantes. C'est la première grande différence avec le plan (où il n'y en a que deux).

✓ Propriété | Les quatre cas possibles

Soient d_1 (passant par A_1 , vecteur directeur $\vec{u}_1$) et d_2 (passant par A_2 , vecteur directeur $\vec{u}_2$).

Position	$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$	Points communs	Coplanaires ?
Confondues	colinéaires	∞	oui
Parallèles strictes	colinéaires	0	oui
Sécantes	non colinéaires	1	oui
Non coplanaires (gauches)	non colinéaires	0	non

Remarque : les trois premiers cas sont exactement les mêmes que dans le plan. Seul le quatrième cas est spécifique à l'espace.

🧠 Intuition | Comment visualiser les quatre cas

Pour bien comprendre ces quatre cas, pense à des objets du quotidien :

- **Confondues** : deux rails d'un même chemin de fer. Ils occupent exactement le même espace (infinité de points communs).
- **Parallèles strictes** : les deux rails d'une voie ferrée. Même direction, mais ils ne se touchent

« Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sans jamais se rencontrer. »

jamais (zéro point commun).

- **Sécantes** : deux routes qui se croisent à un carrefour. Elles se rencontrent en un seul point (un point commun).
- **Non coplanaires (gauches)** : une route au sol et un pont autoroutier qui passe au-dessus. Ils ne sont pas parallèles (directions différentes), mais ne se croisent jamais non plus car ils sont à des altitudes différentes (zéro point commun).

Le test ultime : deux droites non coplanaires ne peuvent pas être dessinées sur une même feuille de papier (= un plan). C'est le critère géométrique fondamental.

⚠ Attention | Ne confonds pas « non sécantes » et « parallèles »

C'est l'erreur la plus fréquente ! Dans le **plan**, « non sécantes » implique « parallèles ». Mais dans l'**espace**, deux droites peuvent ne pas se couper sans être parallèles (cas des droites gauches). Donc à l'examen, quand tu montres que deux droites n'ont pas de point commun, tu ne peux **pas** conclure qu'elles sont parallèles — il faut aussi vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires.

✂ Méthode | Algorithme pour déterminer la position relative de deux droites

Étape 1 : tester si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont **colinéaires**.

- **Si oui** ($\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$) : les droites sont parallèles. Pour distinguer confondues/parallèles strictes, tester si un point de d_2 appartient à d_1 (par exemple, vérifier si $\overrightarrow{A_1A_2}$ est colinéaire à $\vec{u}_1$).
 - Si $A_2 \in d_1 \Rightarrow$ **confondues**.
 - Sinon $\Rightarrow$ **parallèles strictes**.

Étape 2 : si $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$, écrire les représentations paramétriques et **résoudre le système** pour chercher un point d'intersection.

Concrètement : d_1 est paramétrée par t , d_2 par s . On écrit les 3 équations obtenues en égalant les coordonnées :

$$\begin{cases} x_{A_1} + t a_1 = x_{A_2} + s a_2 \\ y_{A_1} + t b_1 = y_{A_2} + s b_2 \\ z_{A_1} + t c_1 = z_{A_2} + s c_2 \end{cases}$$

C'est un système de **3 équations à 2 inconnues** (t et s). On résout les 2 premières, puis on **vérifie dans la 3ème**.

- Si la 3ème équation est satisfaite $\Rightarrow$ **sécantes** (calculer le point).
- Si la 3ème est contredite $\Rightarrow$ **non coplanaires** (droites gauches).

💡 Exemple | Exemple complet : droites sécantes

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$$

Étape 1 : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Non colinéaires car $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$.

Étape 2 : On résout
$$\begin{cases} 1 + t = 2 + s \\ t = 1 - s \\ 2t = 2 + 2s \end{cases}$$

De (2) : $s = 1 - t$. Dans (1) : $1 + t = 2 + (1 - t) = 3 - t$, donc $2t = 2$, $t = 1$ et $s = 0$.

Vérification dans (3) : $2 \times 1 = 2$ et $2 + 2 \times 0 = 2$. $2 = 2 \checkmark$

Les droites sont **sécantes** en $M = (1 + 1, 1, 2) = (2, 1, 2)$.

💡 Exemple | Exemple complet : droites non coplanaires

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = s \\ z = 5 - s \end{cases}$$

Étape 1 : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Non colinéaires (pas de ratio commun).

Étape 2 :
$$\begin{cases} 1 + t = 3 + s & (1) \\ 2 - t = s & (2) \\ 3 + 2t = 5 - s & (3) \end{cases}$$

De (2) : $s = 2 - t$. Dans (1) : $1 + t = 3 + (2 - t) = 5 - t$, donc $2t = 4$, $t = 2$, $s = 0$.

Vérification dans (3) : $3 + 4 = 7$ et $5 - 0 = 5$. $7 \neq 5 \times$

Le système est **incompatible**. Les droites sont **non coplanaires** (droites gauches).

3.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

✔ Propriété | Les trois cas possibles

Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P} : ax + by + cz + d_0 = 0$ un plan de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Position	Critère	Intersection
d sécante à $\mathcal{P}$	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	exactement 1 point
d strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $d \not\subset \mathcal{P}$	aucun point
d contenue dans $\mathcal{P}$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $d \subset \mathcal{P}$	toute la droite

Intuition | Interprétation du critère $\vec{u} \cdot \vec{n}$

Le critère clé est le produit scalaire entre le vecteur directeur de la droite et le vecteur normal du plan.

Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, la droite « pointe vers » le plan (elle n'est pas parallèle à lui). Elle le traverse forcément en un unique point.

Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la droite est perpendiculaire au vecteur normal, c'est-à-dire qu'elle est **parallèle au plan** (ou contenue dedans). Dans ce cas, soit elle est dans le plan (si un point de la droite est dans le plan), soit elle est parallèle stricte (si aucun point de la droite n'est dans le plan).

Méthode | Intersection droite-plan : la méthode fondamentale

C'est l'exercice type du bac. Apprends cette méthode par cœur.

1. **Écrire** la représentation paramétrique de d :
$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$
2. **Substituer** dans l'équation cartésienne du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.
3. On obtient une équation en t de la forme **$At + B = 0$** où $A = \alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{u} \cdot \vec{n}$ et $B = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta$.
4. **Discuter** :
 - $A \neq 0$: **un seul** $t = -B/A \Rightarrow$ droite et plan **sécants**. On calcule le point.
 - $A = 0$ et $B \neq 0$: équation $0 = B \neq 0$, impossible $\Rightarrow d \parallel \mathcal{P}$ **strictement**.
 - $A = 0$ et $B = 0$: équation $0 = 0$, vraie $\forall t \Rightarrow d \subset \mathcal{P}$.

Remarque : $A = \vec{u} \cdot \vec{n}$ n'est rien d'autre que le produit scalaire vecteur directeur $\cdot$ vecteur normal. C'est la **même condition** que dans le tableau ci-dessus.

Exemple | Intersection droite/plan — sécants

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : x + y + z - 5 = 0.$$

Substitution : $(1 + 2t) + (3 - t) + (-1 + t) - 5 = 0$, soit $2t - 2 = 0$, d'où $t = 1$.

Point d'intersection : $I = (1 + 2, 3 - 1, -1 + 1) = \mathbf{(3, 2, 0)}$.

Vérification : $3 + 2 + 0 - 5 = 0 \checkmark$.

Exemple | Intersection droite/plan — parallèles

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : x + y - z - 4 = 0.$$

Substitution : $(t) + (1 + t) - (2 - t) - 4 = 0$, soit $3t - 5 = 0$, d'où $t = 5/3$.

Ah, ici $A = 3 \neq 0$, donc en fait elles sont sécantes. Prenons plutôt un autre exemple :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0.$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0. \text{ Sécantes aussi !}$$

$$\text{Prenons : } d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : x + y - z + 5 = 0.$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0. \text{ Parallèles !}$$

Substitution : $(t) + (1 + 2t) - (3t) + 5 = 0$, soit $0t + 6 = 0$, c'est-à-dire $6 = 0$. **Impossible.**
La droite est **strictement parallèle** au plan (jamais d'intersection).

3.4 Positions relatives de deux plans

✓ Propriété | Les trois cas possibles

Soient $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

Position	Condition sur $\vec{n}_1, \vec{n}_2$	Intersection
Sécants	$\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$	une droite Δ
Parallèles (strictement)	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ et $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$	ensemble vide
Confondus	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ et $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$	le plan entier

🧠 Intuition

Deux feuilles de papier rigides posées l'une sur l'autre se touchent le long d'une ligne droite : c'est l'intersection de deux plans sécants. Si les feuilles sont parallèles (étagères d'une bibliothèque), elles ne se touchent jamais. Si elles sont superposées (confondues), elles coïncident partout.

✂ Méthode | Trouver l'intersection de deux plans sécants

C'est un exercice classique. On cherche la droite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Étape 1 — Vecteur directeur de Δ :

Δ est contenue dans $\mathcal{P}_1$, donc $\vec{d} \perp \vec{n}_1$, c'est-à-dire $\vec{d} \cdot \vec{n}_1 = 0$.

Δ est contenue dans $\mathcal{P}_2$, donc $\vec{d} \perp \vec{n}_2$, c'est-à-dire $\vec{d} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

On résout le système $\begin{cases} \vec{d} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{d} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}$ (2 équations, 3 inconnues). On fixe une coordonnée et on résout.

Étape 2 — Un point de Δ :

On résout simultanément
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 2 équations à 3 inconnues : on fixe une coordonnée (par exemple $z = 0$) et on résout les 2 autres.

Étape 3 : Écrire la représentation paramétrique de Δ .

Exemple | Intersection de deux plans — exemple détaillé

$\mathcal{P}_1 : x + y + z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - y + z - 3 = 0$.

Étape 1 — Normaux : $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Non colinéaires ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$), donc sécants.

Vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$

Soustrayons : $(2a - b + c) - (a + b + c) = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$.

De (1) : $c = -a - b = -2b - b = -3b$. Prenons $b = 1$: $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Étape 2 — Un point : posons $z = 0$.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
 Addition : $3x = 6$, $x = 2$, $y = 1$. Point $A(2, 1, 0)$.

Vérif : $2 + 1 + 0 - 3 = 0 \checkmark$ et $4 - 1 + 0 - 3 = 0 \checkmark$.

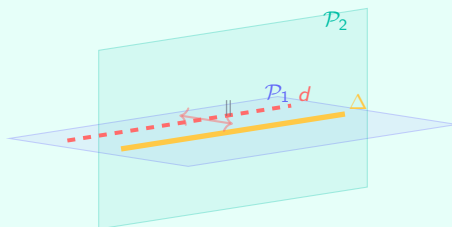
Étape 3 : $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

3.5 Théorèmes de parallélisme et d'orthogonalité

Ces théorèmes sont des outils de raisonnement puissants. Ils permettent de déduire des propriétés géométriques sans calcul.

★ Théorème | Théorème du toit 🏠

Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont **sécants** le long d'une droite Δ , et si une droite d est contenue dans $\mathcal{P}_1$ et est **parallèle** à $\mathcal{P}_2$, alors d est **parallèle** à Δ .



« Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sans jamais se rencontrer. »

★ Théorème | Droite orthogonale à un plan

Si une droite d est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à **toute droite** contenue dans $\mathcal{P}$.

Réciproquement, si d est orthogonale à **deux droites sécantes** contenues dans $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à $\mathcal{P}$.

✓ Propriété | Parallélisme — Règles fondamentales

- Deux droites **parallèles à un même plan** ne sont **pas forcément** parallèles entre elles ! (Elles peuvent être sécantes, ou non coplanaires.)
- Deux droites **parallèles à une même droite** sont **parallèles entre elles**. (Transitivité du parallélisme entre droites.)
- Deux plans **parallèles à un même plan** sont **parallèles entre eux**.
- Si une droite est **parallèle à un plan**, elle est parallèle à toute droite du plan qui lui est parallèle.

⚠ Attention | Piège classique du parallélisme transitif

Attention ! « $d_1 \parallel \mathcal{P}$ et $d_2 \parallel \mathcal{P}$ » n'implique **pas** $d_1 \parallel d_2$. Pense à deux droites tracées sur un mur ($\mathcal{P}$) qui se croisent : elles sont toutes les deux parallèles au mur (puisqu'elles y sont contenues), mais elles ne sont pas parallèles entre elles.

✓ Propriété | Orthogonalité — Règles fondamentales

- Si $d \perp \mathcal{P}$, alors le vecteur directeur de d est un vecteur **normal** de $\mathcal{P}$.
- Si $d \perp \mathcal{P}$ et $d' \parallel \mathcal{P}$, alors $d \perp d'$.
- Si $d \perp \mathcal{P}$ et $d' \perp \mathcal{P}$, alors $d \parallel d'$.
- Si $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$ (plans perpendiculaires), alors $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

3.6 Intersection de trois plans

✓ Propriété | Trois plans de l'espace

Trois plans de l'espace peuvent se trouver dans les positions suivantes :

- **Un point unique** d'intersection (cas générique) : le système de 3 équations a une seule solution.
- **Une droite** d'intersection : les trois plans se coupent le long d'une droite (comme les pages d'un livre ouvert).
- **Aucun point commun** : configurations variées (plans parallèles, « prisme », etc.).

3.7 Distance d'un point à une droite

★ Théorème | Distance d'un point à une droite

Soit d une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, et M un point quelconque. La distance de M à d est :

$$d(M, d) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

où $\vec{AM} \wedge \vec{u}$ désigne le **produit vectoriel** (hors programme strict mais très utile). On peut aussi utiliser la méthode suivante (au programme) :

$$d(M, d) = \sqrt{AM^2 - AH^2}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur d .

✂ Méthode | Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Pour trouver le projeté H de M sur d (passant par A , vecteur directeur $\vec{u}$) :

1. $H \in d$, donc $H = A + t\vec{u}$ pour un certain t .
2. $\vec{MH} \perp \vec{u}$, donc $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Substituer $H = A + t\vec{u}$ dans la condition d'orthogonalité et résoudre en t .

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Check-list complète

Je veux...	J'utilise...
Position de 2 droites	1) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$? 2) Si non, résoudre système 3 éq / 2 inc
Intersection droite/plan	Substituer paramétrique dans cartésienne, résoudre
Intersection 2 plans	Trouver vecteur dir. commun + un point commun
Droite $\perp$ plan ?	Vect. dir. droite = vect. normal du plan ?
Droite $\parallel$ plan ?	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$?
2 plans parallèles ?	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$? (normaux colinéaires)
2 plans perpendiculaires ?	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$?
Paramétrique $\rightarrow$ cartésienne	Trouver $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$, puis d
Cartésienne $\rightarrow$ paramétrique	1 point + 2 vecteurs directeurs de $ax + by + cz = 0$
Projeté sur une droite	$H \in d$ et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Oublier de vérifier la 3ème équation** pour les droites. Si tu trouves (t, s) avec les 2 premières équations et que tu ne vérifies pas dans la 3ème, tu ne sais pas si les droites sont sécantes ou non coplanaires !
2. **Confondre « non sécantes » et « parallèles »**. Dans l'espace, deux droites non sécantes peuvent être soit parallèles (même direction), soit non coplanaires (droites gauches).
3. **Confondre vecteur directeur et vecteur normal**. Le vecteur normal est **perpendiculaire** au plan. Le vecteur directeur est **contenu** dans le plan (ou dirige la droite).
4. **Affirmer que 2 droites parallèles à un plan sont parallèles**. C'est **faux** dans l'espace !
5. **Oublier de conclure**. Après les calculs, donne toujours une phrase de conclusion résumant le résultat géométrique obtenu.

« Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sans jamais se rencontrer. »

5 Exercices

Exercice 1 — Positions relatives de droites

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + 4s \\ y = 1 - 2s \\ z = 4 + 2s \end{cases}, \quad d_3 : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - s \end{cases}.$$

- d_1 et d_2 sont-elles parallèles, sécantes, ou non coplanaires ?
- d_1 et d_3 sont-elles parallèles, sécantes, ou non coplanaires ?

Exercice 2 — Intersection droite/plan

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : 3x + y - z - 8 = 0.$$

- Déterminer le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.
- Quel est l'angle entre d et $\mathcal{P}$?

Exercice 3 — Intersection de deux plans

$$\mathcal{P}_1 : x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + z - 4 = 0.$$

- Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
- Déterminer la représentation paramétrique de la droite d'intersection Δ .

Exercice 4 — Plans parallèles et perpendiculaires

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z + 1 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : 4x - 2y + 6z - 5 = 0, \quad \mathcal{P}_3 : x + y + z - 2 = 0.$$

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont-ils parallèles ? Confondus ?
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont-ils perpendiculaires ?
- Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}_4$ parallèle à $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1, 0, -1)$.

Exercice 5 — Paramétrique $\rightarrow$ cartésienne

$$\text{Soit } \mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 - s + t \\ z = s - t \end{cases}.$$

- Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- En déduire l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
- Le point $M(4, 3, -1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Exercice 6 — Cartésienne $\rightarrow$ paramétrique

$$\text{Soit } \mathcal{P} : 3x - y + 2z - 6 = 0.$$

- Trouver un point et deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
- Écrire la représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
- Vérifier en retrouvant l'équation cartésienne.

Exercice 7 ★★☆☆ — Droite contenue dans un plan ?

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : x + y - 3z - 6 = 0.$$

- Vérifier que d est parallèle à $\mathcal{P}$.
- d est-elle contenue dans $\mathcal{P}$?

Exercice 8 ★★☆☆ — Droite perpendiculaire à un plan

Soit $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$ et $A(1, 1, 1)$.

- Écrire la représentation paramétrique de la droite d passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
- Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.
- Calculer AH .

Exercice 9 ★★☆☆ — Intersection de trois plans

$\mathcal{P}_1 : x + y + z = 6$, $\mathcal{P}_2 : x - y + 2z = 5$, $\mathcal{P}_3 : 2x + y - z = 3$.

- Déterminer le point d'intersection des trois plans.

Exercice 10 ★★☆☆ — Plan passant par 3 points

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(0, 2, 1)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .
- Écrire l'équation cartésienne de (ABC) .
- Le point $D(2, 2, 2)$ est-il dans ce plan ?

Exercice 11 ★★☆☆ — Projeté sur une droite et distance

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{et } M(3, 4, 1).$$

- Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d .
- Calculer la distance de M à d .

Exercice 12 ★★☆☆ — Symétrique par rapport à un plan

$\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $M(3, 1, -1)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$.
- En déduire le symétrique M' de M par rapport à $\mathcal{P}$.
- Vérifier que H est le milieu de $[MM']$ et que M' est à la même distance de $\mathcal{P}$ que M .

6 🐼 Problème — Géométrie d'un tétraèdre régulier ★★ ★

🔥 Problème style prépa

On étudie un tétraèdre régulier (toutes les arêtes de même longueur a) placé dans un repère adéquat. On y met en œuvre : équations de plans et droites, intersections, distances, orthogonalité, projeté, et centre de la sphère inscrite.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, -1)$, $C = (-1, 1, -1)$, $D = (-1, -1, 1)$.

Partie A — Le tétraèdre

1. Calculer les longueurs AB , AC , AD , BC , BD , CD . Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre régulier et donner la longueur commune a des arêtes.
2. Montrer que le centre de gravité G de $ABCD$ est l'origine O .

Partie B — Plans et droites remarquables

3. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC) .
4. Déterminer la représentation paramétrique de la **hauteur** issue de D , c'est-à-dire la droite passant par D et perpendiculaire au plan (ABC) .
5. Déterminer le pied H de cette hauteur (projeté de D sur (ABC)). Montrer que H est le centre de gravité du triangle ABC .
6. Calculer la hauteur DH du tétraèdre.

Partie C — Sphère circonscrite

7. Montrer que O est équidistant de A , B , C , D . En déduire que O est le centre de la sphère **circonscrite** au tétraèdre. Donner son rayon R .
8. Écrire l'équation de cette sphère.
9. **(Bonus)** Déterminer le centre et le rayon de la sphère **inscrite** dans le tétraèdre. On rappelle que le centre de la sphère inscrite est équidistant des quatre faces.

7 Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

a) d_1 et d_2 :

$$\text{Vecteurs directeurs : } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_1.$$

Les vecteurs sont **colinéaires** : $d_1 \parallel d_2$. Reste à savoir si elles sont confondues ou strictement parallèles.

Le point $A_1(1, 0, 3)$ (de d_1 pour $t = 0$) est-il sur d_2 ? On cherche s tel que $1 = 3 + 4s$, soit $s = -\frac{1}{2}$.
Vérifions : $y = 1 - 2(-\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$ ✗.

Donc d_1 et d_2 sont **strictement parallèles**.

b) d_1 et d_3 :

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Non colinéaires } (\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1}).$$

$$\text{On résout : } \begin{cases} 1 + 2t = -1 + s & (1) \\ -t = 2 + s & (2) \\ 3 + t = 1 - s & (3) \end{cases}$$

De (2) : $s = -t - 2$. Dans (1) : $1 + 2t = -1 + (-t - 2) = -3 - t$, d'où $3t = -4$, $t = -\frac{4}{3}$,
 $s = -\frac{4}{3} \times (-1) - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$.

Vérification dans (3) : $3 + (-\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$ et $1 - (-\frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$. $\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ ✓

Les droites sont **sécantes**. Point d'intersection : $x = 1 + 2(-\frac{4}{3}) = -\frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

$$I = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Corrigé — Exercice 2

a) Substitution de d dans $\mathcal{P}$: $3(2 + t) + (1 - 2t) - (3t) - 8 = 0$, soit $6 + 3t + 1 - 2t - 3t - 8 = 0$,
d'où $-2t - 1 = 0$, $t = -\frac{1}{2}$.

Point d'intersection : $x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $y = 1 + 1 = 2$, $z = -\frac{3}{2}$.

$$I = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right).$$

Vérification : $3 \times \frac{3}{2} + 2 - (-\frac{3}{2}) - 8 = \frac{9}{2} + 2 + \frac{3}{2} - 8 = \frac{12}{2} + 2 - 8 = 6 + 2 - 8 = 0$ ✓.

b) L'angle α entre la droite d et le plan $\mathcal{P}$ est le complémentaire de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{n}$:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \vec{u} \cdot \vec{n} = 3 - 2 - 3 = -2.$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \|\vec{n}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}.$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{154}}. \text{ Donc } \alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{154}} \approx 9,3^\circ.$$

Corrigé — Exercice 3

a) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1} : \text{non colinéaires, donc sécants.}$

b) Vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$ Addition : $3a + b = 0, b = -3a$. De (1) : $c = a + 2(-3a) = -5a$. Avec $a = 1 : \vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Un point : posons $z = 0$. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ De (2) : $y = 2x - 4$. Dans (1) : $x + 2(2x - 4) = -1$, $5x = 7, x = \frac{7}{5}, y = \frac{14}{5} - 4 = -\frac{6}{5}$.

$A\left(\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right)$.

$\Delta : \begin{cases} x = \frac{7}{5} + t \\ y = -\frac{6}{5} - 3t \\ z = -5t \end{cases}$

Vérif dans $\mathcal{P}_1 : \frac{7}{5} + t + 2(-\frac{6}{5} - 3t) - (-5t) + 1 = \frac{7}{5} - \frac{12}{5} + t - 6t + 5t + 1 = -1 + 1 = 0 \checkmark$.

Corrigé — Exercice 4

a) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$. Colinéaires, donc parallèles.

Confondus ? Point de $\mathcal{P}_1 : (0, 0, \frac{-1}{3})$. Dans $\mathcal{P}_2 : 0 - 0 + 6 \times \frac{-1}{3} - 5 = -2 - 5 = -7 \neq 0$. **Parallèles stricts.**

b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2(1) + (-1)(1) + 3(1) = 4 \neq 0$. **Non perpendiculaires.**

c) $\mathcal{P}_4 \parallel \mathcal{P}_1$: même normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Passant par $A(1, 0, -1) : 2(x - 1) - (y - 0) + 3(z + 1) = 0$, soit $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Vérif : $2 - 0 - 3 + 1 = 0 \checkmark$. **$\mathcal{P}_4 : 2x - y + 3z + 1 = 0$.**

Corrigé — Exercice 5

a) Vect. directeurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases}$

Addition : $3a = 0, a = 0$. De (1) : $c = b$. Prenons $b = 1, c = 1$. $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathcal{P}$ passe par $A(1, 2, 0)$ (pour $s = t = 0$). Équation : $0(x - 1) + 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0$, soit **$y + z - 2 = 0$.**

Vérif : $A(1, 2, 0)$ donne $2 + 0 - 2 = 0 \checkmark$.

c) $M(4, 3, -1) : 3 + (-1) - 2 = 0 \checkmark$. **Oui**, $M \in \mathcal{P}$.

Corrigé — Exercice 6

a) Point : $y = z = 0$ donne $3x = 6$, $x = 2$. $A(2, 0, 0)$.

Vect. dir. (solutions de $3x - y + 2z = 0$) : $y = 3, z = 0 \Rightarrow x = 1 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. $y = 0, z = 3 \Rightarrow x = -2 :$

$\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Non colinéaires $\checkmark$.

b) $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + s - 2t \\ y = 3s \\ z = 3t \end{cases}$

c) Vérif : $3(2 + s - 2t) - (3s) + 2(3t) - 6 = 6 + 3s - 6t - 3s + 6t - 6 = 0 \checkmark$.

Corrigé — Exercice 7

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$. Donc $d \parallel \mathcal{P}$ (ou $d \subset \mathcal{P}$).

b) On teste si $A(1, 2, -1) \in \mathcal{P} : 1 + 2 - 3(-1) - 6 = 1 + 2 + 3 - 6 = 0 \checkmark$.

Comme $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la droite d est **entièrement contenue** dans $\mathcal{P}$.

Corrigé — Exercice 8

a) $d \perp \mathcal{P}$ signifie que le vect. dir. de d est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

b) Substitution dans $\mathcal{P} : 2(1 + 2t) - (1 - t) + 2(1 + 2t) - 3 = 0$, soit $2 + 4t - 1 + t + 2 + 4t - 3 = 0$, d'où $9t = 0$, $t = 0$.

Donc $H = A = (1, 1, 1)$. Cela signifie que A est déjà **dans le plan** $\mathcal{P}$.

Vérif : $2(1) - 1 + 2(1) - 3 = 2 - 1 + 2 - 3 = 0 \checkmark$. Effectivement, $A \in \mathcal{P}$.

c) $AH = 0$ puisque $H = A$.

Corrigé — Exercice 9

a) Système : $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ x - y + 2z = 5 & (2) \\ 2x + y - z = 3 & (3) \end{cases}$

(1) + (2) : $2x + 3z = 11$. (1) + (3) : $3x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 9$, d'où $x = 3$.

De $2x + 3z = 11 : 6 + 3z = 11$, $z = \frac{5}{3}$. De (1) : $y = 6 - 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

$I = \left(3, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Vérif dans (2) : $3 - \frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{9-4+10}{3} = \frac{15}{3} = 5 \checkmark$. Dans (3) : $6 + \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = \frac{18+4-5}{3} = \frac{17}{3} \dots$
Recalculons.

Reprenons. (1) + (3) : $(x + y + z) + (2x + y - z) = 6 + 3$, soit $3x + 2y = 9$. Ce n'est pas $3x = 9$.

Méthode rigoureuse : (1) - (2) : $2y - z = 1$, soit $z = 2y - 1$. (1) - (3) : $-x + 2z = 3$, soit $x = 2z - 3$.

Substituons dans (1) : $(2z - 3) + y + z = 6$, soit $y + 3z = 9$. Avec $z = 2y - 1$: $y + 3(2y - 1) = 9$, $7y = 12$, $y = \frac{12}{7}$, $z = \frac{24}{7} - 1 = \frac{17}{7}$, $x = \frac{34}{7} - 3 = \frac{13}{7}$.

$$I = \left(\frac{13}{7}, \frac{12}{7}, \frac{17}{7} \right).$$

$$\text{Vérif (1) : } \frac{13+12+17}{7} = \frac{42}{7} = 6 \checkmark. (2) : \frac{13-12+34}{7} = \frac{35}{7} = 5 \checkmark. (3) : \frac{26+12-17}{7} = \frac{21}{7} = 3 \checkmark.$$

Corrigé — Exercice 10

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \end{cases}$$

De (2) : $a = 2b - c$. Dans (1) : $2(2b - c) + b - 2c = 0$, $5b - 4c = 0$, $c = \frac{5b}{4}$. Posons $b = 4$: $c = 5$, $a = 8 - 5 = 3$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } (ABC) \text{ passe par } A(1, 0, 2) : 3(x - 1) + 4y + 5(z - 2) = 0, \text{ soit } \mathbf{3x + 4y + 5z - 13 = 0}.$$

$$\text{Vérif : } A : 3 + 0 + 10 - 13 = 0 \checkmark. B : 9 + 4 + 0 - 13 = 0 \checkmark. C : 0 + 8 + 5 - 13 = 0 \checkmark.$$

$$\text{d) } D(2, 2, 2) : 6 + 8 + 10 - 13 = 11 \neq 0. \mathbf{D \notin (ABC)}.$$

Corrigé — Exercice 11

$$\text{a) } H \in d : H = (1 + t, 2t, -1 + 3t). \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MH} = \begin{pmatrix} 1 + t - 3 \\ 2t - 4 \\ -1 + 3t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2 \\ 2t - 4 \\ 3t - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 : (t - 2) + 2(2t - 4) + 3(3t - 2) = 0, \text{ soit } t - 2 + 4t - 8 + 9t - 6 = 0, 14t = 16, t = \frac{8}{7}.$$

$$H = \left(1 + \frac{8}{7}, \frac{16}{7}, -1 + \frac{24}{7} \right) = \left(\frac{15}{7}, \frac{16}{7}, \frac{17}{7} \right).$$

$$\text{b) } MH = \sqrt{\left(\frac{15}{7} - 3\right)^2 + \left(\frac{16}{7} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{7} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{36+144+100}{49}} = \sqrt{\frac{280}{49}} = \frac{\sqrt{280}}{7} = \frac{2\sqrt{70}}{7} \approx \mathbf{2,39}.$$

Corrigé — Exercice 12

$$\text{a) } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Droite } (MH) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Substitution dans } \mathcal{P} : (3 + t) - 2(1 - 2t) + 2(-1 + 2t) - 1 = 0, \text{ soit } 3 + t - 2 + 4t - 2 + 4t - 1 = 0, 9t - 2 = 0, t = \frac{2}{9}.$$

$$H = \left(3 + \frac{2}{9}, 1 - \frac{4}{9}, -1 + \frac{4}{9} \right) = \left(\frac{29}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{9} \right).$$

$$\text{b) } M' = 2H - M = \left(\frac{58}{9} - 3, \frac{10}{9} - 1, -\frac{10}{9} + 1 \right) = \left(\frac{31}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9} \right).$$

$$\text{c) Milieu de } [MM'] : \left(\frac{3 + \frac{31}{9}}{2}, \frac{1 - \frac{1}{9}}{2}, \frac{-1 - \frac{1}{9}}{2} \right) = \left(\frac{58}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{10}{9} \right) = \left(\frac{29}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{9} \right)$$

Hmm, corrigeons. $\frac{1 + (-\frac{1}{9})}{2} = \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$. Mais $H_y = \frac{5}{9} \neq \frac{4}{9}$. Recalculons H .

$$\text{Substitution : } (3 + t) - 2(1 - 2t) + 2(-1 + 2t) - 1 = 3 + t - 2 + 4t - 2 + 4t - 1 = 9t - 2 = 0, \\ t = \frac{2}{9}. H_y = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$M'_y = 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Milieu : } \frac{1 + \frac{1}{9}}{2} = \frac{10}{9} = \frac{5}{9} = H_y \checkmark.$$

$$M' = \left(\frac{31}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9} \right).$$

$$\text{Distance de } M' \text{ à } \mathcal{P} : \frac{|\frac{31}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - 1|}{3} = \frac{|\frac{31 - 2 - 2 - 9}{9}|}{3} = \frac{18}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Distance de } M \text{ à } \mathcal{P} : \frac{|3 - 2 - 2 - 1|}{3} = \frac{2}{3} \checkmark. \text{ Les distances sont égales.}$$

Corrigé — Problème

Partie A

$$1. AB = \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. AC = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}. AD = \sqrt{4 + 4 + 0} = 2\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{4 + 4 + 0} = 2\sqrt{2}. BD = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}. CD = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Toutes les arêtes mesurent $a = 2\sqrt{2}$. Le tétraèdre est **régulier**. $\checkmark$

$$2. G = \frac{A+B+C+D}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 1 - 1 - 1 \\ 1 - 1 + 1 - 1 \\ 1 - 1 - 1 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O. \checkmark$$

Partie B

$$3. \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{cases} -2b - 2c = 0 \\ -2a - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -c \text{ et } a = -c. \text{ Posons } c = -1 : \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(ABC) : 1(x - 1) + 1(y - 1) + (-1)(z - 1) = 0, \text{ soit } x + y - z - 1 = 0.$$

$$\text{Vérif : } A : 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \checkmark. B : 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \checkmark. C : -1 + 1 + 1 - 1 = 0 \checkmark.$$

$$4. \text{Hauteur issue de } D : \text{droite passant par } D(-1, -1, 1), \text{ direction } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$h : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$5. \text{Substitution dans } (ABC) : (-1 + t) + (-1 + t) - (1 - t) - 1 = 0, \text{ soit } 3t - 4 = 0, t = \frac{4}{3}.$$

$$H = \left(-1 + \frac{4}{3}, -1 + \frac{4}{3}, 1 - \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

$$\text{Centre de gravité de } ABC : G' = \frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3}(1 + 1 - 1, 1 - 1 + 1, 1 - 1 - 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) = H \checkmark.$$

« Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sans jamais se rencontrer. »

6. $DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31$.

Partie C

7. $OA = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. De même, $OB = OC = OD = \sqrt{3}$. Donc O est équidistant des 4 sommets : c'est le centre de la sphère **circonscrite**, de rayon $R = \sqrt{3}$.

8. $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3$, soit $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

9. Le centre I de la sphère inscrite est équidistant des 4 faces. Par symétrie du tétraèdre régulier, $I = G = O = (0, 0, 0)$.

Le rayon de la sphère inscrite est la distance de O à la face (ABC) : $d(O, (ABC)) = \frac{|0+0-0-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Remarquons que $R = \sqrt{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3r$. Pour un tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est toujours **3 fois** celui de la sphère inscrite.

Fin de la Fiche 4 — Droites et plans de l'espace

Tu maîtrises maintenant : les positions relatives de droites et plans, les méthodes d'intersection (droite/plan, plan/plan, droite/droite), le passage entre représentations paramétriques et cartésiennes, les théorèmes de parallélisme et d'orthogonalité, et la projection orthogonale.

Ce chapitre clôt la géométrie dans l'espace. Tu es prêt(e) pour attaquer l'analyse !

→ Prochaine fiche : Suites : Récurrences et limites.

« Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sans jamais se rencontrer. »