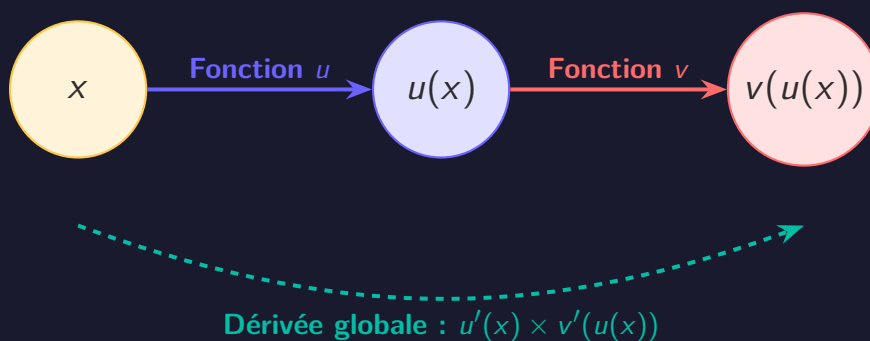


Composée de fonctions & Dérivation

Notation $v \circ u$ ■ Règle en chaîne ■ Formules usuelles ■ Tangentes



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme d'Excellence



Table des matières

1	🔗 Pourquoi étudier la composition et sa dérivée ?	3
1.1	L'analyse des systèmes imbriqués	3
1.2	La règle en chaîne : le moteur de l'intelligence artificielle	3
1.3	La cinématique et les taux de variations liés	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Visualiser la composition mathématique	4
2.2	Comprendre la multiplication des dérivées	4
3	🎓 Le cours formel	5
3.1	Définition et Domaine d'existence	5
3.2	Le Théorème fondamental de Dérivation	6
3.3	Le tableau exhaustif des dérivées composées	7
3.4	Dérivées successives et notions de courbure avancées	8
4	🧰 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	9
5	✎ Exercices	11
6	🔗 Problème — <i>La famille exponentielle</i> ($x^n e^{-x}$) ★★ ★	13
7	✔ Corrigés détaillés	14

1 ? Pourquoi étudier la composition et sa dérivée ?

1.1 L'analyse des systèmes imbriqués

Dans les classes antérieures, l'apprentissage de l'analyse s'est concentré sur des opérations linéaires : additionner des fonctions, les soustraire, ou encore les multiplier. Grâce aux règles de dérivation classiques telles que $(uv)' = u'v + uv'$, tu es désormais capable de dériver des polynômes standard ou de simples produits de fonctions de référence.

Toutefois, la modélisation du monde réel requiert des outils mathématiques d'une puissance supérieure. Comment étudier les variations d'une fonction exponentielle dont l'argument n'est pas un simple x , mais une fonction entière, comme $f(x) = e^{-x^2}$ (la très célèbre fonction de Gauss) ? Ces objets mathématiques complexes portent le nom de **fonctions composées**. Maîtriser la dérivation de ces structures imbriquées constitue le véritable cœur du calcul différentiel moderne enseigné dans le supérieur.

1.2 La règle en chaîne : le moteur de l'intelligence artificielle

La formule permettant de dériver une fonction composée est internationalement connue sous la dénomination de *Chain Rule* (Règle en chaîne). C'est indiscutablement le théorème analytique le plus exploité dans les sciences appliquées et l'ingénierie.

Pour prendre un exemple très contemporain, en informatique et en intelligence artificielle, c'est très exactement cette règle mathématique qui permet d'entraîner les réseaux de neurones profonds. L'algorithme de rétropropagation du gradient, qui permet à une machine d'apprendre de ses erreurs, n'est ni plus ni moins qu'une application informatique répétée du théorème que tu t'apprêtes à étudier dans cette fiche.

1.3 La cinématique et les taux de variations liés

Illustrons ce principe théorique par une situation physique parfaitement intuitive. Considérons un véhicule en mouvement. La consommation de carburant, notée C , dépend intrinsèquement de la distance d qui a été parcourue par le véhicule. Nous pouvons aisément modéliser cela par une fonction $C(d)$. Par ailleurs, la distance parcourue d dépend elle-même du temps t écoulé depuis le point de départ. C'est la fonction horaire $d(t)$.

Si le physicien cherche à déterminer la vitesse de consommation du carburant par rapport au temps chronométré, il doit dériver la fonction globale imbriquée $C(d(t))$. La logique physique dicte de multiplier les vitesses intermédiaires : on multiplie la consommation par kilomètre par le nombre de kilomètres parcourus par heure. Ce raisonnement intuitif est la traduction exacte et rigoureuse de la formule mathématique de dérivation des fonctions composées.

2 L'idée avant la formule

2.1 Visualiser la composition mathématique

Intuition | La chaîne de production

Une fonction mathématique doit être perçue visuellement comme une usine de transformation numérique. Réaliser la composition formelle de deux fonctions, notée $v \circ u$, consiste à raccorder la sortie de la première usine numérique directement à l'entrée de la seconde usine.

- La quantité initiale x pénètre dans la première machine u . Cette machine effectue ses calculs internes et délivre un résultat numérique intermédiaire que l'on note $u(x)$.
- Ce résultat $u(x)$ ne constitue pas la fin du processus de calcul. Il est immédiatement transféré sur le tapis roulant d'une seconde machine de transformation, la fonction v .
- La machine v récupère cette valeur brute, lui applique ses propres règles de calcul, et produit enfin le résultat définitif de la chaîne : $v(u(x))$.

Alerte syntaxique absolue : La notation $v \circ u$ se lit « v rond u ». Bien que la lettre v soit écrite en premier de gauche à droite, c'est rigoureusement la fonction u qui s'exécute en premier lors du calcul, car elle est placée au plus près de la variable x dans l'écriture parenthésée $v(u(x))$.

2.2 Comprendre la multiplication des dérivées

Intuition | L'engrenage des vitesses

La dérivée d'une fonction représente mathématiquement sa vitesse de variation instantanée en un point donné. Imaginons un système mécanique constitué de trois roues dentées en contact successif, que nous appellerons respectivement la roue X , la roue U et la roue V .

- Lorsque l'engrenage X effectue une rotation complète, il entraîne mécaniquement l'engrenage U . Supposons que le rapport de transmission physique soit de 3. Cela signifie que la vitesse de U par rapport à X est de 3. Analytiquement, on note cette vitesse de variation $u'(x) = 3$.
- L'engrenage U , en tournant, entraîne à son tour le déplacement de l'engrenage final V . Admettons un rapport de transmission de 2. La vitesse de variation de V par rapport à U est donc $v'(u) = 2$.
- Quelle est la vitesse de rotation réelle de l'engrenage final V par rapport au tout premier engrenage moteur X ? La mécanique pure impose de **multiplier** les rapports de transmission entre eux : la vitesse globale du système est $3 \times 2 = 6$.

Cette mécanique visuelle illustre à la perfection la formule de l'analyse : la dérivée de la fonction composée globale est strictement égale au produit des dérivées intermédiaires.

3 Le cours formel

3.1 Définition et Domaine d'existence

Définition | Fonction composée

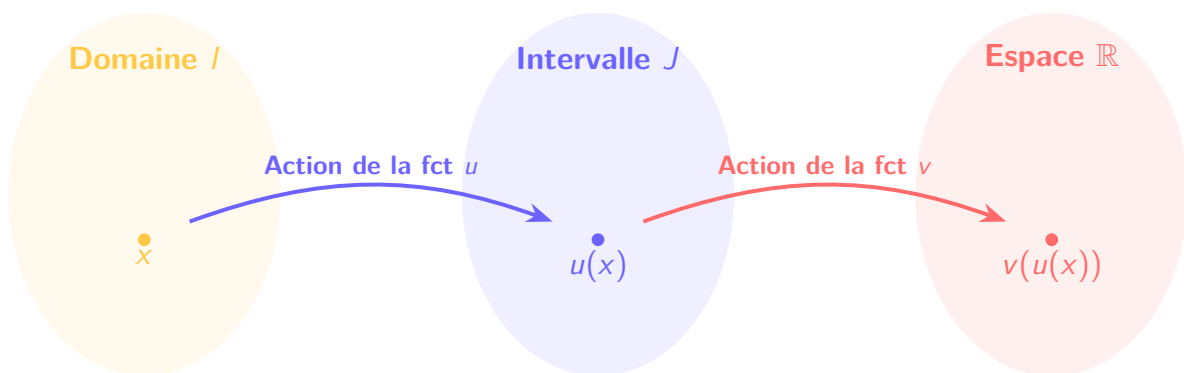
Soit une fonction u définie sur un intervalle I , et dont l'ensemble des images appartient à un intervalle J (ce qui se traduit formellement par l'implication : pour tout $x \in I$, on a $u(x) \in J$). Soit une seconde fonction v , définie sur ce même intervalle d'arrivée J .

La **fonction composée** de la fonction u suivie de la fonction v , que l'on note conventionnellement $v \circ u$, est la fonction mathématique définie sur l'intervalle initial I par la relation algébrique explicite :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Il est absolument impératif de comprendre que le domaine de définition d'une fonction composée n'est pas automatique ni trivial. Pour qu'un nombre réel x admette une image par le processus $v \circ u$, il faut valider deux barrières de sécurité algébriques successives :

1. La valeur x doit appartenir au domaine de définition de la fonction interne u .
2. Le résultat numérique calculé $u(x)$ doit obligatoirement appartenir au domaine de définition de la fonction externe v .



Exemple | Étude détaillée du domaine d'existence

Considérons les fonctions de référence $u(x) = -x + 3$ et $v(x) = \ln(x)$. Nous souhaitons déterminer rigoureusement le domaine de définition de la fonction composée $f(x) = v(u(x))$.

- La fonction u est une fonction affine standard, elle ne présente aucune restriction et est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction v est le logarithme népérien, elle exige de manière stricte une entrée numérique strictement positive.

Pour que la quantité $f(x)$ puisse exister mathématiquement, il faut et il suffit que l'argument soumis au logarithme respecte la condition vitale $u(x) > 0$. Procédons à la résolution de cette inéquation du premier degré :

$$\begin{aligned} -x + 3 &> 0 \\ -x &> -3 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Le domaine de définition de la fonction composée f est donc limité à l'intervalle ouvert $] -\infty; 3[$. L'expression analytique finale de cette fonction s'écrit $f(x) = \ln(-x + 3)$.

3.2 Le Théorème fondamental de Dérivation

★ Théorème | Règle en chaîne de la dérivée

Si la fonction u est mathématiquement dérivable sur l'intervalle I , et si la fonction v est dérivable sur l'intervalle J contenant l'intégralité des images $u(x)$, alors la fonction composée définie par $f = v \circ u$ est rigoureusement dérivable sur l'intervalle I .

Pour tout nombre réel $x \in I$, la dérivée globale se calcule au moyen du produit exact suivant :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Démonstration | Preuve intuitive par l'étude des taux d'accroissement

La dérivée d'une fonction est intrinsèquement fondée sur le concept de la limite de son taux de variation (le fameux quotient de Newton). Pour une fonction formée par composition $f(x) = v(u(x))$, cherchons à établir la limite de ce taux lorsque la variable x tend vers un point fixe d'abscisse a :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} \end{aligned}$$

En supposant pour la clarté de cette démonstration que la fonction u ne stagne pas localement (ce qui se traduit par $u(x) \neq u(a)$ au voisinage strict du point a), on s'autorise à insérer le terme d'écart interne en multipliant et en divisant simultanément l'expression par la différence $u(x) - u(a)$. Cette manipulation algébrique licite permet de scinder la fraction :

$$\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \left(\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \right) \times \left(\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \right)$$

Procédons à l'analyse séparée de ce produit lorsque x tend vers a . La fonction u étant dérivable par hypothèse, elle est nécessairement continue. Cette continuité assure que la limite de l'image $u(x)$ tend irrémédiablement vers $u(a)$. Définissons les changements de variable $X = u(x)$ et $A = u(a)$ pour simplifier la lecture. Le grand facteur placé à gauche de la multiplication représente très exactement le taux d'accroissement de la fonction v entre X et A . Il va tendre formellement vers le nombre dérivé de v évalué au point de contact A :

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow A} \frac{v(X) - v(A)}{X - A} &= v'(A) \\ &= v'(u(a)) \end{aligned}$$

Le facteur placé à droite de la multiplication représente, quant à lui, exactement la définition fondamentale de la dérivée de la fonction u au point a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$$

En appliquant le théorème usuel de la limite d'un produit de fonctions (le produit des limites est la limite du produit), on reconstitue magistralement et de façon élégante la formule annoncée dans le cours :

$$f'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$$

3.3 Le tableau exhaustif des dérivées composées

Le théorème général se décline en plusieurs formules à connaître par cœur. Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable de x .

Réflexe : on dérive la structure globale comme si u était x , puis on multiplie par u' .

Structure de f	Dérivée f'	Conditions sur u
$u^n \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$	$u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ strictement
e^u	$u' \cdot e^u$	Aucune restriction
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ strictement
$\cos(u)$	$-u' \cdot \sin(u)$	Aucune restriction
$\sin(u)$	$u' \cdot \cos(u)$	Aucune restriction

Exemple | Démonstration d'usage des formules répertoriées

Pour t'assurer une application sans faille lors de tes contrôles, voici un développement pas-à-pas pour chaque modèle du tableau :

- **Modèle polynomial (La Puissance)** : Considérons la fonction $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^5$. On pose la fonction intérieure en l'isolant :

$$u(x) = x^3 - 2x + 1$$

Ce qui livre immédiatement sa dérivée simple :

$$u'(x) = 3x^2 - 2$$

L'application de la formule structurale $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$ produit le résultat suivant, en prenant bien soin d'insérer les parenthèses :

$$f'(x) = 5 \cdot (3x^2 - 2) \cdot (x^3 - 2x + 1)^4$$

- **Modèle irrationnel (La Racine carrée)** : Prenons la fonction $g(x) = \sqrt{e^x + x}$. Ici, la sous-fonction protégée par le radical est :

$$u(x) = e^x + x$$

Sa dérivée associée s'écrit :

$$u'(x) = e^x + 1$$

La règle spécifique de la racine dicte que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui conduit directement à l'écriture fractionnaire :

$$g'(x) = \frac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$$

- **Modèle exponentiel (La Transcendante)** : Soit l'équation $h(x) = e^{-3x^2 + x}$. L'exposant, véritable moteur de la fonction, est ciblé par :

$$u(x) = -3x^2 + x$$

En effectuant la dérivée de ce polynôme, on obtient :

$$u'(x) = -6x + 1$$

Le théorème $(e^u)' = u' \cdot e^u$ structure l'affichage final du résultat :

$$h'(x) = (-6x + 1)e^{-3x^2+x}$$

— **Modèle logarithmique** : Soit la fonction définie par $k(x) = \ln(x^2 + 5)$. On extrait l'argument soumis au logarithme :

$$u(x) = x^2 + 5$$

Cette extraction implique une dérivée élémentaire :

$$u'(x) = 2x$$

La règle de dérivation propre au logarithme népérien $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ donne lieu à la fraction :

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

3.4 Dérivées successives et notions de courbure avancées

Il est tout à fait possible (et fréquemment exigé dans les exercices) de dériver une fonction dérivée. On appelle cette procédure le calcul des dérivées successives. La dérivée de la fonction dérivée $f'(x)$ est notée formellement $f''(x)$ et porte le nom de **dérivée seconde**.

En mathématiques pures, elle traduit le taux de variation du coefficient directeur de la tangente. Graphiquement, elle détermine la **convexité** ou la **concavité** de la courbe (la façon dont elle s'incurve). En physique (cinématique), si la fonction décrit une position en fonction du temps, la dérivée première correspond à la **vitesse**, et la dérivée seconde correspond à l'**accélération**.

Le calcul d'une dérivée seconde impliquant une fonction composée réclame généralement de coupler la règle en chaîne avec la règle classique du produit, ce qui demande une rigueur algébrique absolue.

Exemple | Calcul formel et détaillé d'une dérivée seconde

Soit la fonction cinématique oscillatoire définie par $f(x) = \sin(2x)$. Calculons la dérivée première via la règle de composition standard en extrayant le facteur 2 :

$$f'(x) = 2 \cos(2x)$$

Poursuivons l'analyse en dérivant ce nouveau résultat pour obtenir la dérivée seconde. Le coefficient initial 2 reste en facteur constant, et la dérivée du bloc $\cos(2x)$ nécessite une nouvelle composition générant le terme $-2 \sin(2x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \times (-2 \sin(2x)) \\ &= -4 \sin(2x) \end{aligned}$$

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Comment ne jamais se tromper de structure d'équation

La faute fondamentale qui sanctionne sévèrement les copies du baccalauréat consiste à confondre visuellement un produit de fonctions avec une composition. Face à une expression mathématique complexe, pose-toi la question cardinale suivante : « **Quelle est l'opération numérique qui clôt le calcul si je remplaçais x par un nombre ?** »

- L'expression $f(x) = x^2 \cdot e^x$: La toute dernière action effectuée est la multiplication entre le bloc de gauche et celui de droite. Il s'agit indéniablement d'un **PRODUIT** de type $U \times V$. L'arme algébrique requise pour la dérivation : $U'V + UV'$
- L'expression $g(x) = e^{x^2}$: L'opération ultime est le passage à la fonction exponentielle, le calcul de la puissance x^2 n'étant qu'une quantité déjà calculée et emprisonnée à l'intérieur. C'est une pure **COMPOSITION** de type e^u . L'arme algébrique requise pour la dérivation : $u' \cdot e^u$
- L'expression redoutable $h(x) = (2x+1) \cdot \ln(x^2+1)$: La multiplication finale définit l'architecture d'ensemble comme étant un produit massif $U \times V$. Néanmoins, le composant de droite $V(x) = \ln(x^2+1)$ n'est pas une base simple de référence, mais est lui-même structuré comme une fonction composée. Le processus de dérivation de V exigera donc la règle $\frac{w'}{w}$ exécutée au sein même de l'application globale de la formule du produit.

Attention | Top 4 des erreurs d'inattention au calcul

1. **L'amnésie du facteur u' .** Dériver avec précipitation l'expression e^{5x} en conservant bêtement e^{5x} au lieu de $5e^{5x}$ est une calamité. Si l'intérieur n'est pas strictement la variable x pure, le péage dérivationnel u' doit impérativement être acquitté en début d'équation.
2. **La négligence des parenthèses protectrices.** En traitant la dérivée d'un polynôme de type $(x^2+3x)^4$, inscrire machinalement $4 \times 2x + 3 \times (x^2+3x)^3$ détruit immédiatement la priorité mathématique des opérations. L'écriture correcte et totalement sécurisée impose les parenthèses englobant la factorisation : $4(2x+3)(x^2+3x)^3$.
3. **La contamination de l'argument intérieur.** La règle formelle spécifie bien d'évaluer $v'(u(x))$. Il est formellement et définitivement interdit de modifier le cœur du calcul lors du passage à la dérivée de l'enveloppe extérieure. La dérivée complète de $\cos(x^2)$ produit le bloc $-2x \cdot \sin(x^2)$, et en aucun cas la chimère $-2x \cdot \sin(x)$.
4. **L'abandon prématuré du calcul sans la factorisation finale.** Un calcul de dérivée laissé à l'état brut n'est d'aucune utilité pour la suite du problème. La finalité absolue de la dérivation en Terminale est l'étude minutieuse du signe pour en déduire des variations. Une dérivée n'est donc déclarée achevée que lorsqu'elle est réduite à sa plus simple expression **totalelement factorisée** (très généralement accomplie grâce à une factorisation globale par l'exponentielle de base qui met en évidence un polynôme simple).

 Propriété | Le rappel mécanique sur les équations de tangentes

Cette relation matricielle issue de l'enseignement d'analyse de la classe de Première doit affleurer spontanément à la lecture et l'étude de la dérivée : L'équation réduite de la droite tangente, notée couramment (T) , à la courbe représentative d'une fonction analytique f au point d'abscisse de contact local a est inéluctablement dictée par la loi :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

5 Exercices

Exercice 1 — Dérivées de fonctions exponentielles composées

Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- a) $f(x) = e^{4x-7}$
- b) $f(x) = e^{-x^2+1}$
- c) $f(x) = e^{3x^2+2x-1}$

Exercice 2 — Dérivées avec racines, logarithmes et puissances

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

- a) $g(x) = (2x^2 - 5x + 3)^4$
- b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- c) $g(x) = \ln(5x + 2)$ (pour $x > -\frac{2}{5}$)
- d) $g(x) = \ln(x^2 + 4)$

Exercice 3 — Dérivées trigonométriques composées

Dériver les fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \sin(3x + \pi)$
- b) $f(x) = \cos(x^2)$
- c) $f(x) = \sin^2(x)$ (Indication : écrire $(\sin(x))^2$ et utiliser u^n .)

Exercice 4 — Produit et composition

Dériver puis **factoriser** les fonctions suivantes :

- a) $h(x) = (2x + 1)e^{-x}$
- b) $h(x) = x^2 e^{3x}$
- c) $h(x) = (x^2 - 3x)e^{2x}$

Exercice 5 — Quotient et composition

Dériver et factoriser le numérateur :

- a) $k(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
- b) $k(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ (pour $x > 0$)

Exercice 6 — Équation de tangente

Soit $f(x) = x e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et factoriser le résultat.
- b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
- c) La courbe admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, préciser les abscisses.

Exercice 7 — Étude de variations complète

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que $x^2 - 2x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$).
- b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- c) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 8 ★★☆☆ — Application à la physique

La position d'un corps attaché à un ressort est donnée par $x(t) = 5 \cos(2t + \frac{\pi}{3})$ (en mètres, t en secondes).

- a) Calculer la vitesse $v(t) = x'(t)$.
- b) Calculer l'accélération $a(t) = v'(t)$.
- c) Montrer que $a(t) = -4x(t)$. Quelle est la valeur de la constante k telle que $a(t) = -kx(t)$?

Exercice 9 ★★☆☆ — Dérivée n -ième et récurrence

Soit $f(x) = e^{2x}$.

- a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
- b) Conjecturer une formule pour $f^{(n)}(x)$ et la démontrer par récurrence.

Exercice 10 ★★☆☆ — Optimisation : modèle pharmacocinétique

La concentration d'un médicament dans le sang est modélisée par $C(t) = 4t e^{-0,5t}$ (en mg/L, $t \geq 0$ en heures).

- a) Calculer $C'(t)$ et la factoriser.
- b) À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est cette concentration maximale ?

Exercice 11 ★★☆☆ — Vrai ou Faux (justifier)

Pour chaque affirmation, démontrer qu'elle est vraie ou la réfuter par un contre-exemple.

- a) « La dérivée de $f(x) = \ln(e^x + 1)$ vérifie $0 < f'(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. »
- b) « La composée de deux fonctions strictement décroissantes est décroissante. »

Exercice 12 ★★☆☆ — Modèle logistique et équation différentielle

On considère $f(x) = \frac{10}{1 + 9e^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que $f'(x) = \frac{90 e^{-x}}{(1 + 9e^{-x})^2}$.
- b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y(10 - y)}{10}$.

6 Problème — La famille exponentielle ($x^n e^{-x}$) ★★

Problème style prépa

Ce problème étudie la famille de fonctions $f_n(x) = x^n e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$. On y découvre comment la dérivation des produits et des composées permet de relier ces fonctions entre elles par une relation de récurrence élégante. Il mêle calcul différentiel, factorisation et récurrence.

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On admettra que pour tout $n \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x).

Partie A — Étude de f_1 et f_2

1. Calculer $f_1'(x)$ et dresser le tableau de variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $f_2'(x)$, la factoriser, et en déduire le tableau de variations de f_2 sur $[0, +\infty[$.
3. Pour f_1 et f_2 , préciser les coordonnées du maximum et sa valeur exacte.

Partie B — Étude générale de f_n

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $f_n'(x) = (n - x) x^{n-1} e^{-x}$.
Indication : dériver le produit $x^n \times e^{-x}$ et factoriser.
5. En déduire que f_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$.
6. Montrer que le maximum de f_n est atteint en $x = n$ et vaut $f_n(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
7. Calculer $f_n(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. La suite $(f_n(n))_{n \geq 1}$ semble-t-elle croissante ?

Partie C — Relation de récurrence et dérivée seconde

8. Montrer la relation : $f_n'(x) = n f_{n-1}(x) - f_n(x)$ pour tout $n \geq 1$.
9. En dérivant la relation précédente, montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$f_n''(x) = n(n-1) f_{n-2}(x) - 2n f_{n-1}(x) + f_n(x)$$

Indication : dériver la relation de la question 8 en utilisant la même relation appliquée à f_{n-1} .

10. Déterminer les points d'inflexion de f_2 (c'est-à-dire les points où f_2'' s'annule en changeant de signe).

7 Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

- a) Forme e^u avec $u = 4x - 7$, $u' = 4$. Par $(e^u)' = u'e^u$: $f'(x) = 4e^{4x-7}$.
- b) $u = -x^2 + 1$, $u' = -2x$. D'où $f'(x) = -2xe^{-x^2+1}$.
- c) $u = 3x^2 + 2x - 1$, $u' = 6x + 2$. D'où $f'(x) = (6x + 2)e^{3x^2+2x-1} = 2(3x + 1)e^{3x^2+2x-1}$.

Corrigé — Exercice 2

- a) Forme u^n avec $u = 2x^2 - 5x + 3$, $n = 4$, $u' = 4x - 5$. Par $(u^n)' = nu'u^{n-1}$:
- $$g'(x) = 4(4x - 5)(2x^2 - 5x + 3)^3$$
- b) Forme $\sqrt{u}$ avec $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$. Par $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:
- $$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
- c) Forme $\ln(u)$ avec $u = 5x + 2$, $u' = 5$. Par $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $g'(x) = \frac{5}{5x+2}$.
- d) $u = x^2 + 4$, $u' = 2x$. D'où $g'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$.

Corrigé — Exercice 3

- a) $u = 3x + \pi$, $u' = 3$. Par $(\sin u)' = u' \cos u$: $f'(x) = 3 \cos(3x + \pi)$.
- b) $u = x^2$, $u' = 2x$. Par $(\cos u)' = -u' \sin u$: $f'(x) = -2x \sin(x^2)$.
- c) $f(x) = (\sin x)^2 = u^2$ avec $u = \sin x$, $u' = \cos x$. D'où $f'(x) = 2 \sin x \cos x$. On reconnaît la formule de duplication : $f'(x) = \sin(2x)$.

Corrigé — Exercice 4

- a) Produit $U \times V$: $U = 2x + 1$, $V = e^{-x}$, $U' = 2$, $V' = -e^{-x}$.
- $$h'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) = e^{-x}[2 - (2x + 1)] = (1 - 2x)e^{-x}$$
- b) $U = x^2$, $V = e^{3x}$, $U' = 2x$, $V' = 3e^{3x}$.
- $$h'(x) = 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x} = x(2 + 3x)e^{3x}$$
- c) $U = x^2 - 3x$, $V = e^{2x}$, $U' = 2x - 3$, $V' = 2e^{2x}$.
- $$h'(x) = (2x - 3)e^{2x} + (x^2 - 3x) \cdot 2e^{2x} = e^{2x}[(2x - 3) + 2(x^2 - 3x)]$$
- $$= (2x^2 - 4x - 3)e^{2x}$$

Corrigé — Exercice 5

- a) Quotient $\frac{U}{V}$: $U = e^x$, $V = x^2 + 1$, $U' = e^x$, $V' = 2x$.

$$k'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

On a utilisé l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Comme $(x - 1)^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, on a $k'(x) \geq 0$: k est croissante sur $\mathbb{R}$.

- b) $U = \ln(x^2 + 1)$, $V = x$, $U' = \frac{2x}{x^2+1}$, $V' = 1$.

$$k'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2}$$

Corrigé — Exercice 6

a) Produit $U \times V$: $U = x$, $V = e^{-x^2}$, $U' = 1$, $V' = -2x e^{-x^2}$.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x e^{-x^2}) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

b) $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ et $f'(0) = (1 - 0) \cdot e^0 = 1$. Tangente en $x = 0$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

c) Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$. Comme $e^{-x^2} > 0$: $1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corrigé — Exercice 7

a) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$. Coefficient dominant positif, donc $x^2 - 2x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ✓

On peut aussi écrire : $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

b) $u = x^2 - 2x + 2$, $u' = 2x - 2$. D'où $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$.

Le dénominateur est toujours > 0 , donc $f'(x)$ est du signe de $2(x - 1)$: négatif sur $] -\infty, 1[$, nul en $x = 1$, positif sur $]1, +\infty[$.

c) f décroissante sur $] -\infty, 1[$, croissante sur $]1, +\infty[$. Minimum en $x = 1$: $f(1) = \ln(1 - 2 + 2) = \ln(1) = 0$.

Corrigé — Exercice 8

a) $x(t) = 5 \cos(u)$ avec $u = 2t + \frac{\pi}{3}$, $u' = 2$. Par $(\cos u)' = -u' \sin u$:

$$v(t) = x'(t) = -10 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) $v(t) = -10 \sin(u)$ avec le même u . Par $(\sin u)' = u' \cos u$:

$$a(t) = v'(t) = -20 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

c) $-4x(t) = -4 \times 5 \cos(2t + \frac{\pi}{3}) = -20 \cos(2t + \frac{\pi}{3}) = a(t)$ ✓. Donc $k = 4$ (c'est ω^2 avec $\omega = 2$ rad/s).

Corrigé — Exercice 9

a) $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x}$.

On observe : $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

b) **Récurrence.** Initialisation ($n = 1$) : $f'(x) = 2e^{2x} = 2^1 e^{2x}$ ✓.

Hérédité : si $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, alors $f^{(n+1)}(x) = (2^n e^{2x})' = 2^n \times 2e^{2x} = 2^{n+1} e^{2x}$ ✓.

Conclusion : $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ pour tout $n \geq 1$. □

Corrigé — Exercice 10

a) $U = 4t$, $V = e^{-0,5t}$, $U' = 4$, $V' = -0,5 e^{-0,5t}$.

$$C'(t) = 4e^{-0,5t} + 4t(-0,5 e^{-0,5t}) = e^{-0,5t}(4 - 2t) = 2(2 - t) e^{-0,5t}$$

b) $e^{-0,5t} > 0$, donc $C'(t)$ est du signe de $(2 - t)$: positif pour $t < 2$, nul pour $t = 2$, négatif pour $t > 2$.

Maximum en $t = 2$ heures. Valeur : $C(2) = 8 e^{-1} = \frac{8}{e} \approx 2,94$ mg/L.

Corrigé — Exercice 11

a) **Vrai.** $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Numérateur et dénominateur > 0 , donc $f'(x) > 0$. De plus $e^x < e^x + 1$, donc $\frac{e^x}{e^x + 1} < 1$. Au final : $0 < f'(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ✓

- b) Faux.** Contre-exemple : $u(x) = -x$ et $v(x) = -x$, toutes deux décroissantes. Or $(v \circ u)(x) = v(-x) = -(-x) = x$, qui est **croissante**.

Explication : $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$. Si $u' < 0$ et $v' < 0$, le produit est > 0 : la composée est croissante.
Règle : $(-) \times (-) = (+)$.

Corrigé — Exercice 12

- a)** On écrit $f(x) = 10(1 + 9e^{-x})^{-1}$. Forme ku^{-1} avec $u = 1 + 9e^{-x}$, $u' = -9e^{-x}$. Par $(u^{-1})' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f'(x) = 10 \times \frac{9e^{-x}}{(1+9e^{-x})^2} = \frac{90e^{-x}}{(1+9e^{-x})^2} \quad \checkmark$$

- b)** $90e^{-x} > 0$ et $(1 + 9e^{-x})^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: f est **strictement croissante**. $\checkmark$

- c)** On calcule $10 - f(x) = 10 - \frac{10}{1+9e^{-x}} = \frac{10(1+9e^{-x})-10}{1+9e^{-x}} = \frac{90e^{-x}}{1+9e^{-x}}$.

$$\text{Donc } \frac{f(x)(10-f(x))}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{1+9e^{-x}} \times \frac{90e^{-x}}{1+9e^{-x}} = \frac{90e^{-x}}{(1+9e^{-x})^2} = f'(x). \quad \square$$

Corrigé — Problème (La famille $(x^n e^{-x})$)**Partie A**

1. $f_1(x) = x e^{-x}$. Produit : $U = x$, $V = e^{-x}$, $U' = 1$, $V' = -e^{-x}$.

$$f_1'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x) e^{-x}.$$

$e^{-x} > 0$, donc f_1' du signe de $(1 - x)$: positif sur $[0, 1[$, nul en $x = 1$, négatif sur $]1, +\infty[$. f_1 croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$. Avec $f_1(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f_1 = 0$.

2. $f_2(x) = x^2 e^{-x}$. $U = x^2$, $V = e^{-x}$, $U' = 2x$, $V' = -e^{-x}$.

$$f_2'(x) = 2x e^{-x} + x^2(-e^{-x}) = x(2 - x) e^{-x}.$$

Pour $x \geq 0$: $f_2' \geq 0 \Leftrightarrow x(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. f_2 croissante sur $[0, 2]$, décroissante sur $[2, +\infty[$. Avec $f_2(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f_2 = 0$.

3. Max de f_1 : $f_1(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$. Max de f_2 : $f_2(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,541$.

Partie B

4. On dérive $f_n(x) = x^n \times e^{-x}$:

$$f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n (-e^{-x}) = x^{n-1} e^{-x} [n - x] = (n - x) x^{n-1} e^{-x} \quad \square$$

5. Pour $x > 0$: $x^{n-1} > 0$ et $e^{-x} > 0$. Le signe de f_n' est celui de $(n - x)$: positif si $x < n$, négatif si $x > n$. Donc f_n croissante sur $[0, n]$, décroissante sur $[n, +\infty[$.

6. Maximum en $x = n$: $f_n(n) = n^n e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. $\square$

7. $f_1(1) = e^{-1} \approx 0,368$, $f_2(2) = 4e^{-2} \approx 0,541$, $f_3(3) = 27e^{-3} \approx 1,344$, $f_4(4) = 256e^{-4} \approx 4,688$.

La suite $(f_n(n))$ est strictement croissante (et tend vers $+\infty$).

Partie C

8. $n f_{n-1}(x) - f_n(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1} e^{-x} (n - x) = f_n'(x)$. $\square$

9. On dérive $f_n' = n f_{n-1} - f_n$:

$$f_n'' = n f_{n-1}' - f_n'$$

Par la question 8 appliquée à f_{n-1} : $f_{n-1}' = (n-1) f_{n-2} - f_{n-1}$. Et $f_n' = n f_{n-1} - f_n$. D'où :

$$\begin{aligned} f_n'' &= n[(n-1) f_{n-2} - f_{n-1}] - [n f_{n-1} - f_n] \\ &= n(n-1) f_{n-2} - 2n f_{n-1} + f_n \quad \square \end{aligned}$$

10. Pour $n = 2$: $f_2''(x) = 2f_0(x) - 4f_1(x) + f_2(x) = 2e^{-x} - 4x e^{-x} + x^2 e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$.

$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$ (car $e^{-x} > 0$). $\Delta = 16 - 8 = 8$, racines : $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Le trinôme change de signe en chaque racine, donc ce sont bien des **points d'inflexion** :

$x = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586$ et $x = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414$

Fin de la Fiche 7 — Composée & Dérivation

Tu maîtrises maintenant la dérivation des fonctions composées :
règle en chaîne, produits, quotients, et applications concrètes.

Ces techniques sont indispensables pour l'étude de fonctions, l'optimisation et les équations différentielles.

→ Prochaine fiche : Convexité et dérivée seconde.