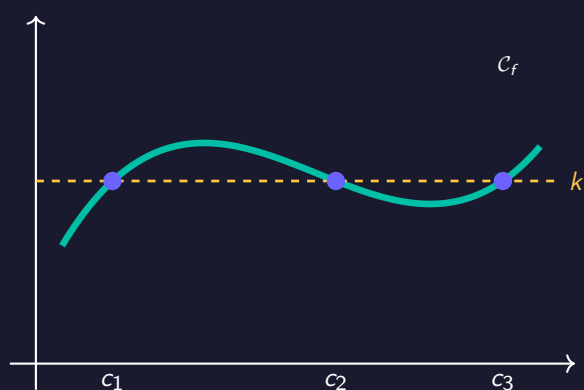


Continuité & TVI

Continuité en un point ■ Fonctions continues usuelles ■ TVI & bijection



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



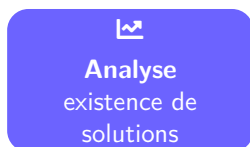
Table des matières

1	 Pourquoi étudier la continuité ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Le crayon qui ne se lève pas	4
2.2	Continuité et limites	4
2.3	Limites à gauche et à droite	4
2.4	Exemple fondamental : étude de continuité par morceaux	5
2.5	Pourquoi c'est puissant	5
3	 Le cours formel	6
3.1	Continuité en un point	6
3.2	Prolongement par continuité	7
3.3	Continuité sur un intervalle et fonctions usuelles	7
3.4	Dérivable $\Rightarrow$ continue	8
3.5	Opérations sur les fonctions continues	8
3.6	Le théorème des valeurs intermédiaires	9
3.7	Corollaire : fonction strictement monotone	10
3.8	Cas $k = 0$: existence d'un zéro	10
3.9	Image d'un segment par une fonction continue	11
3.10	Suites et continuité	12
3.11	Méthode de dichotomie	13
4	 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	14
5	 Exercices	16
6	 Problème — Points fixes et itérations ★★ ★	18
7	 Corrigés détaillés	19

1 ? Pourquoi étudier la continuité ?

1.1 Le problème fondamental

Imagine qu'on te demande : « Montre que $x^5 + 3x - 7 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. » Pas de formule au degré 5. Pourtant, tu vas prouver qu'une solution **existe** sans la calculer. Le secret ? La **continuité** et le **TVI**.



En physique : la température ne saute pas de 20°C à -10°C sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

En économie : si une entreprise est en déficit en janvier et en bénéfice en mars, elle est forcément passée par l'équilibre. C'est le TVI.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

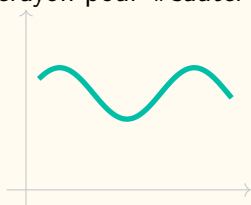
Une fonction **continue** ne peut pas « sauter » d'une valeur à une autre : elle prend **toutes les valeurs intermédiaires**. Cela garantit l'**existence** de solutions.

2 L'idée avant la formule

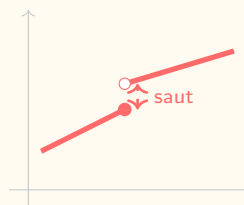
2.1 Le crayon qui ne se lève pas

Intuition | Tracer sans lever le crayon

Si tu peux tracer toute la courbe de f **sans jamais lever ton crayon**, la fonction est continue. Si tu dois lever le crayon pour « sauter », elle est discontinue.



Continue ✓



Discontinue ✗

2.2 Continuité et limites

Intuition | Les trois conditions en une ligne

Dire que f est **continue en a** signifie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Cela encode **trois conditions** :

1. $f(a)$ est défini,
2. la limite de f en a existe (les limites à gauche et à droite coïncident),
3. cette limite est égale à $f(a)$.

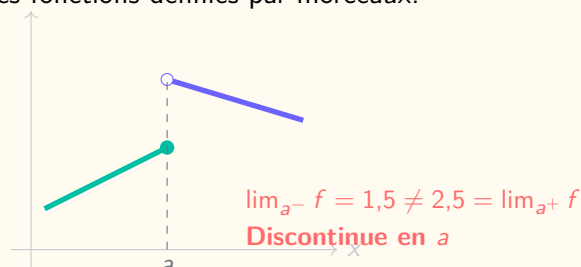
2.3 Limites à gauche et à droite

Intuition | Limites latérales

Si f se comporte différemment des deux côtés de a , on parle de **limites latérales** :

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ = limite **à gauche** ($x < a$ tend vers a),
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ = limite **à droite** ($x > a$ tend vers a).

La limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si et seulement si les deux limites latérales existent et sont égales. C'est **la** méthode pour les fonctions définies par morceaux.



2.4 Exemple fondamental : étude de continuité par morceaux

💡 Exemple | Méthode complète sur un exemple

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Étape 1 : simplifier. Pour $x \neq 1$: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Étape 2 : limite à droite. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1) - 1 = 2$.

Étape 3 : valeur. $f(1) = 3(1) - 1 = 2$.

Conclusion : $\lim_{1^-} f = \lim_{1^+} f = f(1) = 2$: f est **continue en 1**.

Sur $] -\infty, 1[$: $f(x) = x + 1$ (polynôme, continu). Sur $]1, +\infty[$: $f(x) = 3x - 1$ (polynôme, continu).

Et on vient de montrer la continuité en 1. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2.5 Pourquoi c'est puissant

🧠 Intuition | La température 🌡️

S'il fait 5°C à 8 h et 25°C à 14 h, la température (continue) est **forcément** passée par 15°C , 10°C , $17,3^\circ\text{C}$... à un instant entre les deux. C'est le TVI.

3 Le cours formel

3.1 Continuité en un point

Définition | Continuité en un point

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Intuition | Pour aller plus loin : la définition ε - δ (culture)

En post-bac, on formalise la continuité ainsi : f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

« Aussi proche qu'on veut de $f(a)$, pourvu qu'on soit assez proche de a . » Ce n'est pas au programme du bac, mais c'est la définition rigoureuse utilisée en prépa et à la fac.

Définition | Continuité à gauche, à droite

f est **continue à droite en** a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

f est **continue à gauche en** a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

f est continue en $a \iff f$ est continue à gauche **et** à droite en a .

Exemple | Fonctions continues et discontinues

1. $f(x) = x^2$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$ car $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$.

2. La partie entière $\lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en $a = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \neq 2 = \lfloor 2 \rfloor$. En revanche $\lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor = 2 = f(2)$: continue à droite, pas à gauche.

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$: la limite existe et vaut 1. Mais $f(1) = 3 \neq 1$: f n'est **pas** continue en 1.

Attention | Les trois causes de discontinuité

1. $f(a)$ **n'est pas défini** (ex. $\frac{1}{x}$ en 0).
2. La **limite n'existe pas** : infinie, ou limites latérales différentes (ex. signe en 0 : $\lim_{0^-} = -1 \neq 1 = \lim_{0^+}$).
3. La limite existe mais **diffère** de $f(a)$ (exemple 3 ci-dessus).

3.2 Prolongement par continuité

Définition | Prolongement par continuité

Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ existe et est finie, on définit :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est alors continue en a . On dit qu'on a **prolongé** f par continuité en a .

Exemple

1. $\frac{\sin x}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on prolonge par $\tilde{f}(0) = 1$.
2. $\frac{e^x - 1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement de e^x en 0), prolongement $\tilde{f}(0) = 1$.
3. $\frac{1}{x}$ n'admet pas de prolongement continu en 0 (limite infinie).

Propriété | Caractérisation séquentielle de la continuité

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a avec $x_n \in I$ pour tout n , on a $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Autrement dit : « la continuité commute avec les limites de suites. »

Démonstration | Admise — hors programme, mais utile pour comprendre

($\Rightarrow$) Déjà démontré plus loin (théorème de l'image d'une suite convergente).

($\Leftarrow$) Par contraposée : si f n'est pas continue en a , on construit une suite $(x_n) \rightarrow a$ avec $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$.

Exemple | Application : montrer une discontinuité

Montrons que $f(x) = \sin(1/x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Prenons $x_n = \frac{1}{n\pi}$: $x_n \rightarrow 0$ et $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.

Prenons $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$: $y_n \rightarrow 0$ et $f(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.

Deux suites qui tendent vers 0 donnent des images qui tendent vers des limites différentes : la limite de f en 0 n'existe pas. Pas de prolongement continu possible.

3.3 Continuité sur un intervalle et fonctions usuelles

Définition | Continuité sur un intervalle

f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de I .

Si $I = [a, b]$: continuité à droite en a , continuité en tout point de $]a, b[$, continuité à gauche en b .

✓ Propriété | Fonctions de référence continues

Sont continues sur tout leur ensemble de définition :

- fonctions constantes, identité, valeur absolue,
- **polynômes** (sur $\mathbb{R}$),
- **fonctions rationnelles** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (là où $Q \neq 0$),
- $\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, $\exp$ sur $\mathbb{R}$, $\ln$ sur $]0, +\infty[$,
- $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$.

Règle d'or : au bac, toutes les fonctions classiques sont continues sur leur domaine. Il faut le **dire** mais pas le redémontrer.

3.4 Dérivable $\Rightarrow$ continue

✓ Propriété | Toute fonction dérivable est continue

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Contrapposée : si f n'est pas continue en a , elle n'est pas dérivable en a .

 *Démonstration | Exigible au bac*

Supposons f dérivable en a . Pour $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Quand $x \rightarrow a$: le premier facteur tend vers $f'(a)$ (définition de la dérivée) et le second vers 0. Par produit :

$$f(x) - f(a) \rightarrow f'(a) \times 0 = 0$$

Donc $f(x) \rightarrow f(a)$: f est continue en a .

⚠ Attention | La réciproque est FAUSSE

$|x|$ est continue en 0 mais pas dérivable : $\frac{|h|}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0^+$ et $\rightarrow -1$ quand $h \rightarrow 0^-$. Les taux d'accroissement latéraux diffèrent : point anguleux.

Retiens : **dérivable** $\Rightarrow$ **continue**, mais **continue** $\nRightarrow$ **dérivable**.

3.5 Opérations sur les fonctions continues

✓ Propriété | Stabilité par opérations

Si f et g sont continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $f + g$, λf , $f \times g$ sont continues sur I ,
- $\frac{f}{g}$ est continue là où $g \neq 0$.

 Démonstration | Idée

Ce sont des conséquences des règles sur les limites. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a)$ par somme des limites. Idem pour produit et quotient (quand $g(a) \neq 0$).

 Propriété | Continuité de la composée

Si f est continue sur I et g continue sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

 Démonstration

Soit $a \in I$. f continue en a : $f(x) \rightarrow f(a)$ quand $x \rightarrow a$. g continue en $f(a)$: $g(f(x)) \rightarrow g(f(a))$. Donc $g \circ f$ est continue en a .

 Exemple | Applications

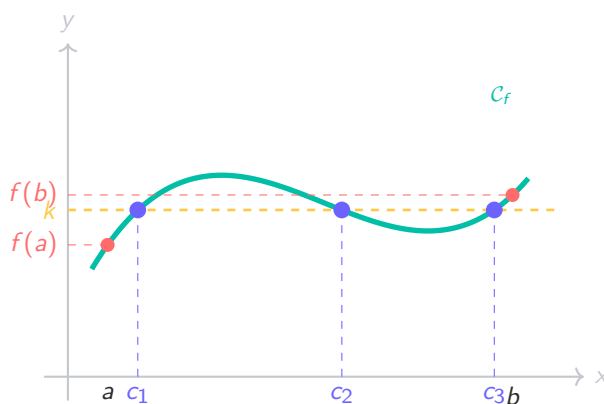
- $x \mapsto e^{x^2+1} = \exp \circ (x \mapsto x^2 + 1)$: continue sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \sqrt{2x+3} = \sqrt{\cdot} \circ (x \mapsto 2x+3)$: continue sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$.
- $x \mapsto \ln(\cos x) = \ln \circ \cos$: continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (où $\cos x > 0$).
- $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-8}$: quotient de polynômes, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3.6 Le théorème des valeurs intermédiaires

 Théorème | TVI — version générale

Soit f **continue** sur $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = k$$



« Une courbe continue se trace sans lever le crayon. »

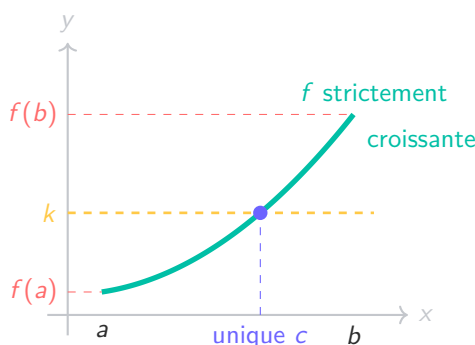
⚠ Attention | Ce que le TVI ne dit PAS

Le TVI garantit l'**existence** mais **ni l'unicité ni la valeur de c** . Il peut y avoir plusieurs solutions (voir c_1, c_2, c_3 ci-dessus). Pour l'unicité, il faut la **monotonie stricte**.

3.7 Corollaire : fonction strictement monotone

★ Théorème | Corollaire du TVI — bijection

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a, b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.



Démonstration | Exigible au bac

Existence : par le TVI (f continue, k entre $f(a)$ et $f(b)$).

Unicité : par l'absurde. Si $c_1 < c_2$ vérifient $f(c_1) = f(c_2) = k$ et f est strictement croissante, alors $f(c_1) < f(c_2)$, ce qui contredit $f(c_1) = f(c_2)$. Donc la solution est unique.

3.8 Cas $k = 0$: existence d'un zéro

★ Théorème | Théorème du zéro

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone, ce c est **unique**.

Démonstration

C'est le TVI avec $k = 0$. Si $f(a) < 0 < f(b)$, alors 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$, donc $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = 0$. Comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, on a $c \in]a, b[$.

✓ Propriété | Conséquence : tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle

Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ avec n impair et $a_n \neq 0$, alors P admet au moins une racine réelle.

 Démonstration

Supposons $a_n > 0$ (l'autre cas est symétrique). Quand $x \rightarrow +\infty$, $P(x) \rightarrow +\infty$, et quand $x \rightarrow -\infty$, $P(x) \rightarrow -\infty$ (car n impair). Donc il existe $a < b$ tels que $P(a) < 0 < P(b)$. Comme P est continue (polynôme), le TVI donne $\exists c \in]a, b[, P(c) = 0$.

Application : c'est ce qui nous permet d'affirmer que $x^5 + 3x - 7 = 0$ a une solution sans rien calculer de plus.

 Méthode | Méthode type au bac : unique solution de $f(x) = 0$

1. **Continuité.** « f est continue sur $[a, b]$ car... »
2. **Changement de signe.** Calculer $f(a)$ et $f(b)$, vérifier $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. **Monotonie.** Étudier f' : si $f' > 0$ (ou < 0) sur $]a, b[$, f est strictement monotone.
4. **Conclusion.** « D'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a, b]$. »
5. **Encadrement (bonus).** Tester des valeurs pour resserrer.

 Exemple | Exercice type entièrement rédigé

Énoncé : Montrer que $e^x = 2x + 1$ admet exactement deux solutions.

Posons $f(x) = e^x - 2x - 1$. On a $f'(x) = e^x - 2$, qui s'annule en $x = \ln 2$.

$f' < 0$ sur $] -\infty, \ln 2[$ et $f' > 0$ sur $] \ln 2, +\infty[$: f décroissante puis croissante.

$f(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 - 1 = 1 - 2 \ln 2 \approx -0,39 < 0$ (minimum).

$\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Sur $] -\infty, \ln 2]$: f continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à $f(\ln 2) < 0$. Par le corollaire du TVI : unique solution. On vérifie $f(0) = 0$: c'est $\alpha_1 = 0$.

Sur $[\ln 2, +\infty[$: f continue, strictement croissante, de $f(\ln 2) < 0$ à $+\infty$. Unique solution α_2 .

Encadrement : $f(1) \approx -0,28 < 0$, $f(2) \approx 2,39 > 0$: $\alpha_2 \in [1; 2]$.

Conclusion : exactement **deux** solutions.

3.9 Image d'un segment par une fonction continue **Théorème | Image d'un segment**

Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un segment :

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

 Propriété | Théorème des bornes atteintes (admis)

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est **bornée et atteint ses bornes** : il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \min_{[a, b]} f$ et $f(d) = \max_{[a, b]} f$.

⚠ Attention | Hypothèse « segment » indispensable

Sur un intervalle ouvert, c'est faux. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ est continue mais non bornée. $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ est bornée mais n'atteint ni 0 ni 1.

💡 Exemple | Image d'un segment : calcul concret

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $[-1, 3]$. On a $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Tableau de variations : $f(-1) = 6$, $f(1) = 2$ (minimum), $f(3) = 6$ (maximum).

Donc $f([-1, 3]) = [2, 6]$.

Conséquence : l'équation $f(x) = k$ a des solutions si et seulement si $k \in [2, 6]$.

✅ Propriété | Image d'un intervalle quelconque

Si f est continue sur un intervalle I (pas forcément un segment), alors $f(I)$ est un **intervalle** (pas forcément un segment). C'est une conséquence directe du TVI.

✎ Démonstration

Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ avec $y_1 < y_2$. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit y entre y_1 et y_2 . Sur l'intervalle d'extrémités x_1 et x_2 (inclus dans I car I est un intervalle), f est continue et y est entre $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Par le TVI : il existe c entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = y$. Donc $y \in f(I)$. L'image $f(I)$ contient tous les réels entre deux quelconques de ses éléments : c'est un intervalle.

3.10 Suites et continuité

★ Théorème | Image d'une suite convergente

Si f est continue sur I , (u_n) à valeurs dans I et $u_n \rightarrow \ell \in I$, alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

✎ Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité en ℓ : $\exists \delta > 0, |x - \ell| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$. Par convergence de (u_n) : $\exists N, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \delta$. Donc pour $n \geq N$: $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$.

✅ Propriété | Point fixe d'une suite récurrente

Si f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$, et (u_n) converge vers ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

✎ Démonstration

$u_{n+1} = f(u_n)$. Quand $n \rightarrow +\infty$: à gauche $u_{n+1} \rightarrow \ell$, à droite $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ (par continuité). Par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.

✂ Méthode | Étude complète de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. **Points fixes.** Résoudre $f(x) = x$.
2. **Stabilité.** Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n .
3. **Monotonie de (u_n) .** Étudier le signe de $f(x) - x$ sur I .
4. **Convergence.** Suite monotone bornée $\Rightarrow$ convergente. Limite = point fixe.

💡 Exemple | Exemple complet : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, u_0 = 0$

Point fixe : $\frac{1}{2}x + 1 = x \Rightarrow x = 2$.

Stabilité sur $[0, 2]$: si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $1 \leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2$. Donc $u_{n+1} \in [0, 2]$.

Monotonie : $f(x) - x = 1 - \frac{1}{2}x$. Pour $x \leq 2$: $f(x) - x \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$: (u_n) croissante.

Convergence : croissante et majorée par 2 $\Rightarrow$ converge. f continue (affine) et $\ell = f(\ell) \Rightarrow \ell = 2$.
On peut aussi le vérifier : $u_n = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 2$.

⚠ Attention | Piège classique : convergence $\neq$ point fixe

Attention à l'ordre logique :

1. D'abord on montre que (u_n) **converge** (suite monotone bornée),
2. Ensuite on en déduit que la limite est un point fixe (par continuité).

On ne peut **pas** dire « la suite converge vers un point fixe » sans avoir d'abord prouvé la convergence.
Un point fixe peut exister sans que la suite converge vers lui.

3.11 Méthode de dichotomie

✂ Méthode | Dichotomie

On encadre la solution α de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$ (f continue, $f(a) \cdot f(b) < 0$) :

- Calculer $m = \frac{a+b}{2}$ et $f(m)$.
- Si $f(a) \cdot f(m) \leq 0$: remplacer b par m , sinon remplacer a par m .
- Après n étapes : longueur de l'intervalle $= \frac{b-a}{2^n}$.

Pour une précision ε : $n \geq \frac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln 2}$ étapes.

En Python :

```
def dichotomie(f, a, b, eps):
    while b - a > eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Phrases-clés pour la rédaction

1. « f est continue sur $[a, b]$ car... » (polynôme, dérivable, composée...).
2. « $f(a) = \dots$ et $f(b) = \dots$, donc $f(a) \cdot f(b) < 0$. »
3. « D'après le TVI, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. »
4. (unicité) « De plus $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$, donc f strictement croissante. D'après le corollaire du TVI, la solution est unique. »

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...

Tu penses à...

« montrer qu'il existe une solution »	TVI (existence)
« montrer l'unicité de α »	TVI + monotonie stricte
« encadrer à 10^{-n} près »	dichotomie
« $f(a) \cdot f(b) < 0$ », « change de signe »	TVI, cas $k = 0$
« $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite »	point fixe + continuité
« f continue strictement monotone »	corollaire du TVI (bijection)
« solutions de $f(x) = k$ »	TVI sur chaque intervalle de monotonie

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Oublier de vérifier la continuité.** Le TVI ne marche **que** si f est continue.
2. **Confondre existence et unicité.** TVI seul = « au moins un ». Pour « exactement un » il faut la monotonie.
3. **Oublier la continuité pour les suites.** « La limite est un point fixe » nécessite f continue ET (u_n) convergente.
4. **Ne pas vérifier sur *tout* $[a, b]$.** Définie en a et b ne suffit pas.
5. **Écrire « continue car définie ».** Définie $\neq$ continue. Cite une propriété.

✂ Méthode | Récapitulatif des théorèmes

Théorème	Hypothèses $\Rightarrow$ Conclusion
TVI général	f continue sur $[a, b]$, k entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow \exists c, f(c) = k$
TVI ($k=0$)	f continue, $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in]a, b[, f(c) = 0$
Corollaire bijection	f continue et strictement monotone $\Rightarrow \exists! c, f(c) = k$
Bornes atteintes	f continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ bornée, atteint min et max
Image segment	f continue sur $[a, b] \Rightarrow f([a, b])$ est un segment
Point fixe	f continue, $u_{n+1} = f(u_n)$, $(u_n) \rightarrow \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$
Dériv. $\Rightarrow$ cont.	f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

5 Exercices

Exercice 1 — Continuité : vrai ou faux

Dire si chaque fonction est continue en a . Justifier.

- a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ en $a = 2$.
- b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $a = 1$.
- c) $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$.
- d) $\varphi(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$.

Exercice 2 — Opérations et continuité

Justifier la continuité sur le domaine de définition :

- a) $f(x) = x^3 - 5x + 2$
- b) $g(x) = e^{-x^2}$
- c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
- d) $k(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$

Exercice 3 — Existence par le TVI

- a) Montrer que $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.
- b) Montrer que $e^x = 3 - x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
- c) Montrer que $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 4 — Dichotomie

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0, 1]$.

- a) Montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0, 1]$.
- b) Encadrer α à 10^{-1} près par dichotomie.
- c) Combien d'étapes pour 10^{-3} près ?

Exercice 5 — Nombre de solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
- c) Encadrer chaque solution à 10^{-1} près.

Exercice 6 — Prolongement par continuité

- a) Montrer que $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ admet un prolongement continu en 0 et donner sa valeur.
- b) Idem pour $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- c) Idem pour $h(x) = x^2 \cos(1/x)$ en 0.

Exercice 7 ★★☆☆ — **Fonction par morceaux**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Trouver a, b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Pour ces valeurs, f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 8 ★★☆☆ — **Suite récurrente et point fixe**

$$f(x) = \sqrt{2x+3}, \quad u_0 = 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- a) Trouver les points fixes de f .
- b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 3$ et que (u_n) est croissante.
- c) En déduire la convergence et la limite.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Méthode de Héron**

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), \quad u_0 = 2, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .
- b) Montrer que (u_n) est décroissante.
- c) Déterminer la limite.
- d) Calculer u_1, u_2, u_3 et commenter.

Exercice 10 ★★☆☆ — **Image d'un intervalle**

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

- a) Étudier les variations de f .
- b) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
- c) Combien de solutions a $f(x) = \frac{1}{3}$?

Exercice 11 ★★★★★ — **Démonstrations de cours**

- a) Redémontrer que dérivable $\Rightarrow$ continue.
- b) Démontrer le corollaire du TVI (unicité).
- c) Démontrer que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue admet un point fixe.

Exercice 12 ★★★★★ — **Équation paramétrée**

$$\text{Soit } m \in \mathbb{R} \text{ et } f_m(x) = x^3 - 3x + m.$$

- a) Étudier les variations de f_m .
- b) Pour quelles valeurs de m l'équation $f_m(x) = 0$ admet-elle 1, 2 ou 3 solutions ?

6 🐼 Problème — Points fixes et itérations ★★ ★

🔥 Problème style prépa

Ce problème explore le **théorème du point fixe de Banach** : existence, unicité et convergence de la suite itérée.

Soit $I = [a, b]$ un segment et $f : I \rightarrow I$. On dit que f est **k -contractante** ($0 \leq k < 1$) si :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

On pose $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A — Existence et unicité du point fixe

1. Montrer qu'une fonction k -contractante est continue.
2. Poser $g(x) = f(x) - x$. Montrer que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
3. En déduire que f admet au moins un point fixe.
4. Montrer que ce point fixe est unique (raisonner par l'absurde).
5. On note ℓ l'unique point fixe.

Partie B — Convergence

6. Montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$.
7. En déduire $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
8. Montrer que $(u_n) \rightarrow \ell$.
9. Établir : $|u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$.

Partie C — Applications

10. Montrer que $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$ est $\frac{1}{3}$ -contractante sur $[0, 1]$. En déduire que $\cos x = 3x$ a une unique solution dans $[0, 1]$.
11. $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ pour $a > 0$, $I = [\sqrt{a}, M]$.
 - (i) Montrer $f(I) \subseteq I$.
 - (ii) Montrer que f est contractante sur I .
 - (iii) En déduire la convergence de la méthode de Héron vers $\sqrt{a}$.
12. **(Bonus)** Exhiber $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$ mais sans point fixe.

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Le dénominateur $x-2$ s'annule en $a=2$: f n'est **pas définie** en 2, donc a fortiori pas continue en 2.

Prolongement possible : pour $x \neq 2$, $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. On peut prolonger par $\tilde{f}(2) = 4$, et $\tilde{f}$ est alors continue en 2 (et même sur $\mathbb{R}$).

b) On calcule les limites latérales en $a=1$:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1$
- $g(1) = 1^2 = 1$

Les trois sont égaux : g est **continue en 1**.

c) $h(0) = 1$ par définition. Et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (limite classique). Donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 = h(0)$: h est **continue en 0**.

d) $\varphi(0) = 0$. Pour $x \neq 0$: $|\varphi(x)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|$ car $|\sin| \leq 1$. Comme $|x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, par le théorème des gendarmes $\varphi(x) \rightarrow 0 = \varphi(0)$: φ est **continue en 0**.

Exercice 2

a) Polynôme : continu sur $\mathbb{R}$. b) Composée $\exp \circ (x \mapsto -x^2)$: continu sur $\mathbb{R}$. c) $x^2 + 1 > 0$ partout, $\ln$ continue sur $]0, +\infty[$: par composition, continu sur $\mathbb{R}$. d) $1 + x^2 > 0$ partout : quotient continu sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ continue (polynôme). $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. Par le TVI : $\exists c \in]0, 1[$, $f(c) = 0$.

b) $g(x) = e^x - 3 + x$ continue. $g(0) = -2 < 0$, $g(2) = e^2 - 1 > 0$. Par le TVI : solution dans $]0, 2[$.

c) $h(x) = \cos x - x$ continue. $h(0) = 1 > 0$, $h(\pi) = -1 - \pi < 0$. Par le TVI : solution dans $]0, \pi[$.

Exercice 4

a) f continue, $f(0) \cdot f(1) < 0$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante. Corollaire du TVI : unique solution.

b) $f(0,5) \approx -0,38 < 0$: $\alpha \in [0,5; 1]$. $f(0,7) \approx 0,04 > 0$: $\alpha \in [0,5; 0,7]$. $f(0,6) \approx -0,18 < 0$: $\alpha \in [0,6; 0,7]$.

c) $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 1000$. Or $2^{10} = 1024$: **10 étapes**.

Exercice 5

$f(x) = x^3 - 3x + 1$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$\lim_{-\infty} f = -\infty$, $f(-1) = 3$ (max local), $f(1) = -1$ (min local), $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Sur $]-\infty, -1]$: f continue, strictement croissante, de $-\infty$ à 3. Comme $0 \in]-\infty, 3]$, par le corollaire du TVI : unique solution α_1 . Encadrement : $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, puis $f(-1,9) \approx -0,56 < 0$, $f(-1,8) \approx 0,57 > 0$: $\alpha_1 \in [-1,9; -1,8]$.

Sur $[-1, 1]$: f continue, strictement décroissante, de 3 à -1 . Comme $0 \in [-1, 3]$, par le corollaire du TVI : unique solution α_2 . Encadrement : $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, puis $f(0,3) \approx 0,13 > 0$, $f(0,4) \approx -0,14 < 0$: $\alpha_2 \in [0,3; 0,4]$.

Sur $[1, +\infty[$: f continue, strictement croissante, de -1 à $+\infty$. Comme $0 \in]-1, +\infty[$, par le corollaire du TVI : unique solution α_3 . Encadrement : $f(1,5) = -0,125 < 0$, $f(1,6) \approx 0,30 > 0$: $\alpha_3 \in [1,5; 1,6]$.

Bilan : une solution par intervalle de monotonie, exactement **trois solutions** au total.

Exercice 6

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement de $\exp$ en 0). Prolongement : $\tilde{f}(0) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement de $\ln(1+x)$ en 0). Prolongement : $\tilde{g}(0) = 1$.

c) $|h(x)| = x^2 |\cos(1/x)| \leq x^2 \rightarrow 0$. Prolongement : $\tilde{h}(0) = 0$.

Exercice 7

a) Continuité en 1 : $\lim_{1^-} f = a + b$ et $\lim_{1^+} f = \ln 1 + 2 = 2$. Condition : $a + b = 2$.

b) $f'(1^-) = 2a$, $f'(1^+) = 1$. Dérivabilité $\Leftrightarrow 2a = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Avec ces valeurs, f est dérivable en 1.

Exercice 8

$f(x) = \sqrt{2x+3}$, définie sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Points fixes : $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x$ (avec $x \geq 0$). On élève au carré : $2x+3 = x^2$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Discriminant $\Delta = 16$, racines $x = \frac{2 \pm 4}{2}$, soit $x = 3$ ou $x = -1$. Comme $x \geq 0$, l'unique point fixe est $\ell = 3$.

Récurrence : $0 \leq u_n \leq 3$

Initialisation : $u_0 = 0 \in [0, 3]$.

Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq 3$. Alors $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$, donc $\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$, i.e. $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$. En particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Croissance de (u_n) : on pose $g(x) = f(x) - x = \sqrt{2x+3} - x$ et on étudie son signe sur $[0, 3]$.

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - 1$. Pour $x \geq 0$: $2x+3 \geq 3 > 1$, donc $\sqrt{2x+3} > 1$, d'où $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $[0, 3]$. Comme $g(3) = \sqrt{9} - 3 = 0$, on en déduit $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 3]$.

Donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$: (u_n) est croissante.

Convergence : (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers une limite ℓ . f est continue sur $[0, 3]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par passage à la limite $\ell = f(\ell)$: ℓ est un point fixe. Le seul point fixe positif est 3 : $\ell = 3$.

Premiers termes : $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{3}+3} \approx 2,54$, $u_3 \approx 2,84$.

Exercice 9

$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ pour $x > 0$. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrons $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .

Par l'inégalité arithmético-géométrique (AM-GM) : pour $x > 0$,

$$\frac{x + \frac{2}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{2}$$

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{2}$ dès que $u_n > 0$. Comme $u_0 = 2 > 0$, par récurrence immédiate $u_n \geq \sqrt{2} > 0$ pour tout n .

b) Montrons que (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

Or $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geq 2$, d'où $2 - u_n^2 \leq 0$ et $u_n > 0$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Égalité quand $u_n = \sqrt{2}$, ce qui n'arrive jamais car $u_0 = 2 > \sqrt{2}$ et la suite est strictement décroissante tant que $u_n > \sqrt{2}$.

c) (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$: elle converge vers une limite $\ell \geq \sqrt{2}$.

Par continuité de f : $\ell = f(\ell) = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell})$. Donc $2\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$, soit $\ell = \frac{2}{\ell}$, d'où $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$ (car $\ell > 0$).

d) Calcul des premiers termes :

— $u_0 = 2$

— $u_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2} = 1,5$

— $u_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12} \approx 1,416\,667$

— $u_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408} \approx 1,414\,216$

Or $\sqrt{2} \approx 1,414\,2136$. Dès u_3 , on a **5 décimales exactes**. La convergence est **quadratique** : à chaque étape, le nombre de décimales correctes double approximativement. C'est bien plus rapide que la dichotomie (convergence linéaire).

Exercice 10

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}. \quad f'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

$\lim_{\pm\infty} f(x) = 0$. Minimum global $f(-1) = -\frac{1}{2}$, maximum global $f(1) = \frac{1}{2}$.

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et atteint sa borne inf $-\frac{1}{2}$ et sa borne sup $\frac{1}{2}$. Par le TVI : $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

c) $f(x) = \frac{1}{3}$. Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$:

Sur $] -\infty, -1]$: f décroissante de 0 à $-\frac{1}{2}$, donc $f < 0$: aucune solution.

Sur $[-1, 1]$: f strictement croissante de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{3} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: une unique solution par le corollaire du TVI.

Sur $[1, +\infty[: f$ strictement décroissante de $\frac{1}{2}$ à 0^+ , et $\frac{1}{3} \in]0, \frac{1}{2}[: une unique solution par le corollaire du TVI.$

Total : exactement **2 solutions**.

Vérification : $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$. $\Delta = 5$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$: bien deux solutions positives.

Exercice 11

a) Supposons f dérivable en a . Pour $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Quand $x \rightarrow a$: le premier facteur tend vers $f'(a)$ (définition de la dérivée), le second vers 0. Par règle du produit des limites : $f(x) - f(a) \rightarrow f'(a) \times 0 = 0$, donc $f(x) \rightarrow f(a)$: f est continue en a .

b) Soit f continue et strictement croissante sur $[a, b]$, $k \in [f(a), f(b)]$.

Existence : f est continue sur $[a, b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par le TVI, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Unicité : supposons par l'absurde qu'il existe $c_1 < c_2$ dans $[a, b]$ avec $f(c_1) = f(c_2) = k$. Comme f est **strictement** croissante et $c_1 < c_2$, on a $f(c_1) < f(c_2)$. Or $f(c_1) = f(c_2) = k$: contradiction. Donc la solution est unique.

Le cas strictement décroissant se traite de façon identique.

c) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Posons $g(x) = f(x) - x$.

g est continue sur $[0, 1]$ (différence de fonctions continues).

$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Comme $f(0) \in [0, 1]$, on a $g(0) \geq 0$.

$g(1) = f(1) - 1$. Comme $f(1) \in [0, 1]$, on a $f(1) \leq 1$, donc $g(1) \leq 0$.

Cas 1 : $g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, c'est un point fixe.

Cas 2 : $g(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1$, c'est un point fixe.

Cas 3 : $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. Par le TVI, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$.

Dans tous les cas, f admet un point fixe dans $[0, 1]$.

Remarque : ce résultat est un cas très particulier du théorème du point fixe de Brouwer, qui généralise ce principe en dimension quelconque.

Exercice 12

$f_m(x) = x^3 - 3x + m$. $f'_m(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: **indépendant de m** .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'_m(x)$		+	0	-	0	+
$f_m(x)$		$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$

Max local : $f_m(-1) = m + 2$. Min local : $f_m(1) = m - 2$.

L'équation $f_m(x) = 0$ coupe l'axe des x en :

3 points $\Leftrightarrow$ le max est > 0 et le min est $< 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0$ et $m - 2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{-2 < m < 2}$.

1 point $\Leftrightarrow m > 2$ (min local > 0 , la courbe ne croise l'axe qu'une fois à gauche) ou $m < -2$ (max local < 0 , une seule fois à droite).

2 points $\Leftrightarrow m = 2$ (min = 0 : tangence) ou $m = -2$ (max = 0 : tangence).

Interprétation géométrique : les courbes $y = f_m(x)$ sont obtenues par translation verticale de $y = x^3 - 3x$. Quand m augmente, la courbe « monte » : elle passe de 3 intersections avec l'axe à 1.

Corrigé du problème

Partie A — Existence et unicité

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in I$ avec $|x - y| < \varepsilon$. Alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k\varepsilon \leq \varepsilon$$

Donc f est continue en tout point de I . (En fait, f est même **uniformément continue**, ce qui est plus fort : le $\delta = \varepsilon$ ne dépend pas du point considéré.)

2. $g(x) = f(x) - x$ est la différence de deux fonctions continues (f par la question 1, et id), donc g est continue sur $[a, b]$.

$f : I \rightarrow I$ signifie $f(a) \in [a, b]$, donc $f(a) \geq a$, d'où $g(a) = f(a) - a \geq 0$.

De même $f(b) \in [a, b]$, donc $f(b) \leq b$, d'où $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

3. Si $g(a) = 0$: $f(a) = a$, point fixe trouvé. Si $g(b) = 0$: $f(b) = b$. Sinon $g(a) > 0 > g(b)$: par le TVI appliqué à g continue sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$.

4. Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$ deux points fixes. Alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq k|\ell_1 - \ell_2|$$

Comme $|\ell_1 - \ell_2| > 0$, on simplifie : $1 \leq k$. Contradiction avec $k < 1$.

Donc le point fixe est **unique**. On le note ℓ .

Partie B — Convergence

6. $\ell = f(\ell)$ (point fixe), donc :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$$

7. *Initialisation* : $|u_0 - \ell| \leq k^0|u_0 - \ell| = |u_0 - \ell|$, vrai.

Hérédité : si $|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$, alors par la question 6 :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell| \leq k \cdot k^n|u_0 - \ell| = k^{n+1}|u_0 - \ell|$$

8. $0 \leq |u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$. Comme $0 \leq k < 1$, $k^n \rightarrow 0$. Par le théorème des gendarmes : $|u_n - \ell| \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell$.

9. Par l'inégalité triangulaire :

$$|u_0 - \ell| \leq |u_0 - u_1| + |u_1 - \ell| \leq |u_0 - u_1| + k|u_0 - \ell|$$

D'où $(1 - k)|u_0 - \ell| \leq |u_0 - u_1|$, soit $|u_0 - \ell| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k}$.

En combinant avec la question 7 :

$$|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell| \leq \frac{k^n}{1 - k}|u_1 - u_0|$$

« Une courbe continue se trace sans lever le crayon. »

Cet encadrement est très utile en pratique : il donne une **borne d'erreur a priori** ne dépendant que de k , n et des deux premiers termes.

Partie C — Applications

10. $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$. Pour tous $x, y \in [0, 1]$, par l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3} |\cos x - \cos y| \leq \frac{1}{3} \sup_{[0,1]} |\sin t| \cdot |x - y| \leq \frac{1}{3} |x - y|$$

car $|\sin t| \leq 1$. Donc f est $\frac{1}{3}$ -contractante.

De plus $f([0, 1]) \subseteq [\frac{\cos 1}{3}, \frac{1}{3}] \subseteq [0, 1]$ (car $\cos 1 > 0$). Par le théorème de Banach : unique point fixe ℓ dans $[0, 1]$ vérifiant $\frac{1}{3} \cos \ell = \ell$, soit $\cos \ell = 3\ell$.

11.(i) Pour $x \geq \sqrt{a}$: par AM-GM, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}$. Et $f(x) - x = \frac{1}{2}(\frac{a}{x} - x) = \frac{a-x^2}{2x} \leq 0$ car $x \geq \sqrt{a} \Rightarrow x^2 \geq a$. Donc $f(x) \leq x \leq M$. Ainsi $f(I) \subseteq I$.

(ii) $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$. Pour $x \geq \sqrt{a}$: $\frac{a}{x^2} \leq 1$, donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$. Donc f est $\frac{1}{2}$ -contractante.

(iii) Par le théorème du point fixe de Banach appliqué à f sur I : la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe $\ell \in I$. Or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell}) = \ell \Leftrightarrow \ell^2 = a \Leftrightarrow \ell = \sqrt{a}$ (car $\ell > 0$).

12. (Bonus) Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1 - \frac{1}{1+e^x}$.

On a $f(x) - x = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \in]0, 1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: donc $f(x) > x$ pour tout x , et f n'a **aucun point fixe**.

Vérifions que f est strictement contractante : $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. On pose $g(t) = \frac{t}{(1+t)^2}$ pour $t = e^x > 0$.

On vérifie que $0 < g(t) < \frac{1}{4}$ pour $t > 0$ (maximum en $t = 1$). Donc $\frac{3}{4} < f'(x) < 1$ pour tout x . Par le théorème des accroissements finis, pour $x \neq y$: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Morale : sans la constante $k < 1$ **uniforme**, la contraction stricte ne suffit pas à garantir l'existence d'un point fixe. Le théorème de Banach exige $k < 1$ global.

Fin de la Fiche — Continuité & TVI

Tu maîtrises maintenant la continuité, le TVI et son corollaire, les suites récurrentes et la dichotomie.

*Ces outils seront essentiels pour les primitives,
l'intégration et les équations différentielles.*

➔ Prochaine fiche : Fonction exponentielle.