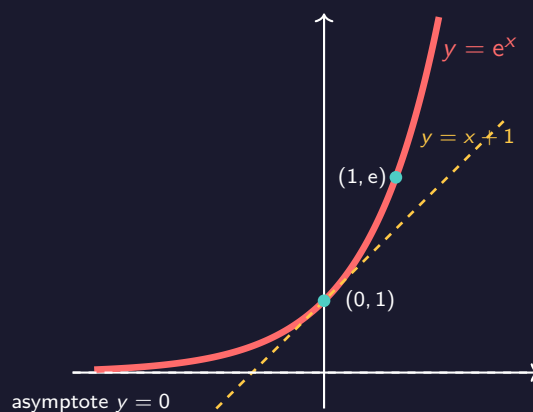


Fonction exponentielle

Définition & propriétés ■ Équations & inéquations ■ Croissances comparées



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



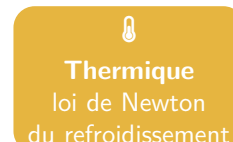
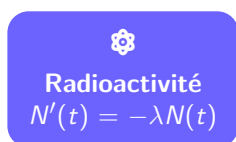
Table des matières

1	 Pourquoi étudier l'exponentielle ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	La fonction qui est sa propre dérivée	4
2.2	La croissance exponentielle au quotidien	4
2.3	Sommes $\rightarrow$ produits	4
2.4	Graphiquement	5
3	 Le cours formel	6
3.1	Existence et unicité	6
3.2	Le nombre e	6
3.3	Relation fonctionnelle	7
3.4	Signe et position par rapport à 1	8
3.5	Étude complète de la fonction exponentielle	8
3.6	Limites de référence	10
3.7	Croissances comparées	10
3.8	Dérivée de e^u	11
3.9	Équations et inéquations avec l'exponentielle	12
3.10	Fonctions a^x et exponentielle de base a	13
3.11	Équations différentielles $y' = ay$	13
4	 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	 Exercices	17
6	 Problème — L'exponentielle par les séries ★★ ★	20
7	 Corrigés détaillés	21

1 ? Pourquoi étudier l'exponentielle ?

1.1 Le problème fondamental

Quelle fonction vérifie $f' = f$? Plus précisément : existe-t-il une fonction égale à sa propre dérivée ? Cette question, *a priori* très abstraite, surgit naturellement dès qu'on modélise la réalité.



En physique : la décroissance radioactive obéit à $N'(t) = -\lambda N(t)$, dont la solution est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Le carbone 14 ($\lambda \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$) permet de dater des fossiles jusqu'à 50 000 ans.

En biologie : une population de bactéries double toutes les 20 minutes. Après t minutes : $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/20} = N_0 e^{t \ln 2 / 20}$.

En finance : un capital C_0 placé au taux annuel r avec intérêts composés continus vaut $C(t) = C_0 e^{rt}$ après t années.

En thermique : la loi de Newton donne $T(t) - T_{\text{amb}} = (T_0 - T_{\text{amb}}) e^{-kt}$: le café refroidit exponentiellement.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

L'exponentielle est l'**unique fonction** égale à sa propre dérivée et valant 1 en 0.
Elle transforme les **sommes en produits**, croît plus vite que tout polynôme, et modélise tout phénomène de **croissance ou décroissance proportionnelle**.

2 🧠 L'idée avant la formule

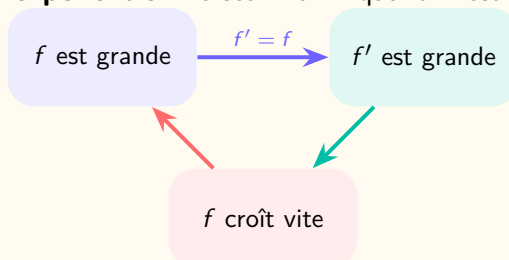
2.1 La fonction qui est sa propre dérivée

🧠 Intuition | Le cercle magique 🔄

Imagine une fonction dont la **vitesse de variation** est égale à la fonction elle-même :

$$f'(x) = f(x)$$

Quand f est grande, elle croît vite $\rightarrow$ elle devient encore plus grande $\rightarrow$ elle croît encore plus vite... C'est l'**emballement exponentiel**. Le seul frein : quand f est proche de 0, elle varie peu.



2.2 La croissance exponentielle au quotidien

🧠 Intuition | L'échiquier de Sissa 🏰

Légende : Sissa demande 1 grain de blé sur la 1^{re} case, 2 sur la 2^e, 4 sur la 3^e... 2⁶³ sur la 64^e.
Total : $2^{64} - 1 \approx 1,8 \times 10^{19}$ grains $\approx$ 700 milliards de tonnes. Plus que toute la production mondiale cumulée.

Morale : la croissance exponentielle dépasse très vite toute intuition linéaire. C'est ce que formalisent les **croissances comparées**.

2.3 Sommes $\rightarrow$ produits

🧠 Intuition | La propriété fondamentale

L'exponentielle « transforme les sommes en produits » :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

C'est la propriété **symétrique** de celle du logarithme ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$). L'une est la réciproque de l'autre.

Conséquences immédiates :

- Soustraire $\rightarrow$ diviser : $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Multiplier $\rightarrow$ puissance : $e^{na} = (e^a)^n$
- Opposé $\rightarrow$ inverse : $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

2.4 Graphiquement

Intuition | Lire la courbe de e^x

Quelques repères utiles :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	$\approx 0,05$	$\approx 0,14$	$\approx 0,37$	1	$\approx 2,72$	$\approx 7,39$	$\approx 20,1$

- La courbe passe par $(0, 1)$ et $(1, e)$.
- Tangente en $(0, 1)$: $y = x + 1$ (pente = $e^0 = 1$).
- Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$: la courbe « colle » à l'axe des x à gauche.
- En $+\infty$: explosion verticale.
- La courbe est toujours **au-dessus** de sa tangente en 0 ($e^x \geq x + 1$).

3 Le cours formel

3.1 Existence et unicité

★ Théorème | Théorème fondamental (admis)

Il existe une **unique** fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$.

⚠ Attention | Pourquoi la condition $f(0) = 1$?

Sans elle, $g = 0$ (la fonction nulle) conviendrait aussi ($g' = 0 = g$). Plus généralement, si $f' = f$ et $f(0) = C$, alors $f(x) = Ce^x$. La condition $f(0) = 1$ sélectionne la « bonne » fonction.

✓ Propriété | Conséquences immédiates du théorème

1. $e^0 = 1$ (condition initiale).
2. $(e^x)' = e^x$ (l'exponentielle est sa propre dérivée).
3. $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction ne s'annule jamais).

Démonstration | De $e^x > 0$

Posons $g(x) = e^x \cdot e^{-x}$. Alors $g'(x) = e^x \cdot e^{-x} + e^x \cdot (-e^{-x}) = 0$. Donc g est constante : $g(x) = g(0) = e^0 \cdot e^0 = 1$. Ainsi $e^x \cdot e^{-x} = 1$ pour tout x , ce qui prouve que $e^x \neq 0$ pour tout x (et même que $e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0$ si l'on sait que e^x est à valeurs réelles).

3.2 Le nombre e

Définition | Le nombre e

On définit le nombre e comme la valeur de la fonction exponentielle en 1 :

$$e = \exp(1) \approx 2,718\,281\,828\,459\dots$$

e est un nombre **irrationnel** (et même **transcendant** : il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers).

✓ Propriété | Approcher e

1. $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (intérêts composés)
2. $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ (série entière)

$$3. \quad 2,718 < e < 2,719$$

💡 Exemple | Intérêts composés

Tu places 1 000 à 100% par an. Si les intérêts sont versés :

- 1 fois/an : $1000 \times 2 = 2000$
- 12 fois/an : $1000 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2613$
- En continu ($n \rightarrow \infty$) : $1000 \times e \approx 2718$

C'est l'origine historique de e (Jacob Bernoulli, 1683).

3.3 Relation fonctionnelle

★ Théorème | Propriété fondamentale

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

L'exponentielle **transforme les sommes en produits**.

🔧 Démonstration | Exigible au bac

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et posons $g(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x}$.

$$g'(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x} + e^{a+x} \cdot (-e^{-x}) = e^{a+x} \cdot e^{-x} - e^{a+x} \cdot e^{-x} = 0.$$

Donc g est constante : $g(x) = g(0) = e^a \cdot e^0 = e^a$.

En particulier pour $x = b$: $e^{a+b} \cdot e^{-b} = e^a$, d'où $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

✓ Propriété | Propriétés algébriques complètes

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

1. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ (somme $\rightarrow$ produit)
2. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ (opposé $\rightarrow$ inverse)
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ (différence $\rightarrow$ quotient)
4. $(e^a)^n = e^{na}$ (puissance)
5. $\sqrt[n]{e^a} = e^{a/2}$ (racine $\rightarrow$ moitié de l'exposant)

🔧 Démonstration | Des propriétés 2 à 5

$$2. \quad e^a \cdot e^{-a} = e^{a+(-a)} = e^0 = 1, \text{ donc } e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$$

$$3. \quad e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a \cdot e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

$$4. \quad \text{Pour } n \in \mathbb{N}^* : (e^a)^n = \underbrace{e^a \cdot e^a \cdots e^a}_n = e^{a+a+\cdots+a} = e^{na}. \text{ Pour } n = 0 : (e^a)^0 = 1 = e^0. \text{ Pour}$$

$$n < 0 : (e^a)^n = \frac{1}{(e^a)^{-n}} = \frac{1}{e^{-na}} = e^{na}.$$

$$5. (e^{a/2})^2 = e^{2 \cdot a/2} = e^a, \text{ donc } e^{a/2} = \sqrt{e^a} \text{ (car } e^{a/2} > 0).$$

💡 Exemple | Simplifications types

1. $e^3 \cdot e^{-1} = e^{3-1} = e^2.$
2. $\frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{5x-2x} = e^{3x}.$
3. $(e^{2x})^3 = e^{6x}.$
4. $e^x \cdot e^x = e^{2x}$ (**attention** : $e^x \cdot e^x \neq e^{x^2}$!).
5. $\frac{1}{e^{-3}} = e^3.$
6. $\sqrt{e^{2x+1}} = e^{(2x+1)/2} = e^{x+1/2}.$

⚠ Attention | Erreurs fréquentes sur l'exponentielle

- $e^{a+b} \neq e^a + e^b$ (c'est un **produit**, pas une somme !)
- $e^a \cdot e^b \neq e^{ab}$ (le produit des exposants $\rightarrow$ somme, pas produit)
- $(e^a)^b = e^{ab}$, **mais** $e^{(a^b)} \neq (e^a)^b$ en général
- $(e^x)^2 = e^{2x}$, **mais** $e^{x^2} \neq (e^x)^2$
- e^x n'est **jamais** négatif ni nul : $e^x > 0$ toujours

3.4 Signe et position par rapport à 1

✓ Propriété | Signe de $e^x - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $e^x < 1$ si $x < 0$
- $e^x = 1$ si $x = 0$
- $e^x > 1$ si $x > 0$

✎ Démonstration

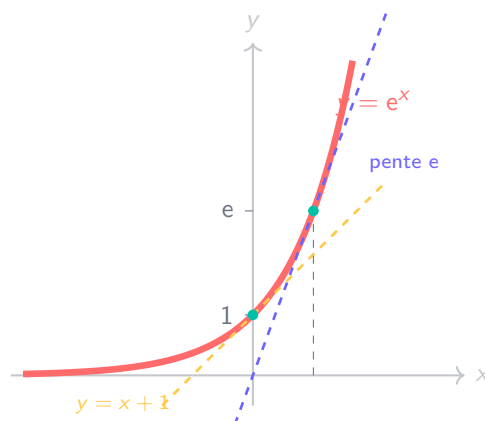
e^x est strictement croissante (car $(e^x)' = e^x > 0$) et $e^0 = 1$. Donc $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 = 1$, etc.

3.5 Étude complète de la fonction exponentielle

✓ Propriété | Variations et tableau complet

$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$: **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
 $\exp$ est **convexe** sur $\mathbb{R}$: $(e^x)'' = e^x > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	$+$	
$\exp(x)$	0^+	$\nearrow +\infty$



✓ Propriété | Conséquences de la stricte croissance

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $e^a = e^b \iff a = b$ (injectivité)
- $e^a < e^b \iff a < b$ (comparaison sans changement de sens)
- $e^a \leq e^b \iff a \leq b$

Autrement dit : on peut « passer à l'exponentielle » dans une égalité ou inégalité **sans changer le sens**.

✓ Propriété | Convexité et inégalité fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration

Posons $f(x) = e^x - x - 1$. $f'(x) = e^x - 1$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$. $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, $f'(x) > 0$ pour $x > 0$: minimum en $x = 0$.

$f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout x , i.e. $e^x \geq x + 1$.

Interprétation géométrique : la courbe $y = e^x$ (convexe) est toujours au-dessus de sa tangente en $(0, 1)$, qui est $y = x + 1$.

3.6 Limites de référence

★ Théorème | Limites fondamentales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

L'axe des abscisses ($y = 0$) est **asymptote horizontale** en $-\infty$.

Démonstration

En $+\infty$: de $e^x \geq x + 1$ (pour tout x), on déduit $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

En $-\infty$: posons $t = -x \rightarrow +\infty$. $e^x = e^{-t} = \frac{1}{e^t} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0$.

✓ Propriété | Taux d'accroissement en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

C'est le taux d'accroissement de $\exp$ en 0 : $\frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow \exp'(0) = e^0 = 1$.

Exemple | Utilisation du taux d'accroissement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \times 1 = 3.$$

En posant $u = 3x \rightarrow 0$: $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$, donc la limite est 3.

3.7 Croissances comparées

★ Théorème | Croissances comparées — le résultat fondamental

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

En $+\infty$, l'exponentielle **croît plus vite** que tout polynôme. On dit que e^x **domine** x^n .

Démonstration | Exigible au bac

Il suffit de montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (le cas général s'en déduit).

De $e^x \geq x + 1$, on déduit, pour $t \geq 0$: $e^t \geq 1 + t$, donc $e^{t/2} \geq 1 + \frac{t}{2}$, et en élevant au carré (tout est positif) :

$$e^t = (e^{t/2})^2 \geq \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 \geq \frac{t^2}{4}$$

D'où $\frac{e^t}{t} \geq \frac{t}{4} \rightarrow +\infty$.

✓ Propriété | Variantes des croissances comparées

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (e^x bat tout polynôme)
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en $-\infty$ aussi)
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (équivalent au précédent)
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = +\infty$ pour tout $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$

Démonstration | De la variante 2

Posons $t = -x \rightarrow +\infty$. $x^n e^x = (-t)^n e^{-t} = (-1)^n \cdot \frac{t^n}{e^t}$. Or $\frac{t^n}{e^t} \rightarrow 0$ par la croissance comparée fondamentale. Donc $x^n e^x \rightarrow 0$.

Exemple | Applications des croissances comparées

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x)e^{-x} = 0$ (le e^{-x} écrase le polynôme).
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 = +\infty$ car $e^x - x^3 = x^3(\frac{e^x}{x^3} - 1)$ et $\frac{e^x}{x^3} \rightarrow +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^{100}} = +\infty$ ($\alpha = 2$ bat tout n).
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2/e^x}{1 + x/e^x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$.

Attention | Hiérarchie des croissances

En $+\infty$, du plus lent au plus rapide :

$$\underbrace{\ln x}_{\text{le plus lent}} \ll \underbrace{x^\alpha}_{\text{puissance}} \ll \underbrace{e^x}_{\text{exponentielle}} \ll \underbrace{e^{x^2}}_{\text{encore plus}}$$

« L'exponentielle gagne toujours. » C'est **la** règle à retenir pour les limites.

3.8 Dérivée de e^u

✓ Propriété | Dérivée d'une composée

Si u est dérivable sur I , alors e^u est dérivable sur I et :

$$(e^u)' = u' e^u$$

Démonstration

Règle de la chaîne : $(e^{u(x)})' = \exp'(u(x)) \cdot u'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

« L'exponentielle est sa propre dérivée : la plus belle propriété de l'analyse. »

💡 Exemple | Dérivées à connaître

- $(e^{3x})' = 3e^{3x}$
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$
- $(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$
- $(e^{-x^2/2})' = -x e^{-x^2/2}$ (apparaît en probabilités : loi normale)
- $(xe^x)' = (1+x)e^x$ (produit + chaîne)
- $(x^2e^{-x})' = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

✔ Propriété | Primitive de e^x

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Plus généralement : $\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C.$

Retiens : quand tu vois $u' e^u$, c'est e^u .

3.9 Équations et inéquations avec l'exponentielle

✂ Méthode | Trois stratégies

Stratégie 1 : se ramener à $e^A = e^B$. Utiliser l'injectivité : $e^A = e^B \iff A = B$.

Stratégie 2 : poser $X = e^x$. Transformer en équation polynomiale en X (avec $X > 0$).

Stratégie 3 : passer au ln. Si $e^{f(x)} = k$ avec $k > 0$, alors $f(x) = \ln k$. Si $k \leq 0$: pas de solution.

💡 Exemple | Équations résolues

1. $e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4.$
2. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. $X^2 - 5X + 6 = 0$, $(X - 2)(X - 3) = 0$, $X = 2$ ou $X = 3$. Donc $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.
3. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. $X = e^x > 0$. $X^2 + X - 2 = 0$, $(X + 2)(X - 1) = 0$. Seul $X = 1 > 0$: $x = \ln 1 = 0$.
4. $3e^x = 7 \iff e^x = \frac{7}{3} \iff x = \ln \frac{7}{3} = \ln 7 - \ln 3.$

✂ Méthode | Inéquations

Comme exp est **strictement croissante** :

$$e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

Pas de changement de sens. Et $e^x > 0$ toujours, donc on peut diviser par e^x sans changer le sens.

💡 Exemple | Inéquations résolues

- $e^{2x-1} \geq e^3 \iff 2x-1 \geq 3 \iff x \geq 2. S = [2, +\infty[.$
- $e^x \leq 5 \iff x \leq \ln 5. S =]-\infty, \ln 5].$
- $e^{2x} - 3e^x - 4 \leq 0. X = e^x > 0. X^2 - 3X - 4 \leq 0, (X-4)(X+1) \leq 0, \text{ soit } -1 \leq X \leq 4.$
Comme $X > 0 : 0 < X \leq 4$, i.e. $e^x \leq 4, x \leq \ln 4 = 2 \ln 2. S =]-\infty, 2 \ln 2].$

3.10 Fonctions a^x et exponentielle de base a

📖 Définition | Exponentielle de base a

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

En particulier : $2^x = e^{x \ln 2}, \quad 10^x = e^{x \ln 10}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x \ln 2}.$

✅ Propriété

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. En particulier $(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$.

✍ Démonstration

$a^x = e^{x \ln a}$, donc $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$.

💡 Exemple

$2^x = 5 \iff e^{x \ln 2} = 5 \iff x \ln 2 = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = \log_2 5 \approx 2,32.$
Temps de doublement : si $N(t) = N_0 e^{kt}$, alors $N(t_d) = 2N_0 \iff t_d = \frac{\ln 2}{k}.$

3.11 Équations différentielles $y' = ay$

★ Théorème | Équation différentielle $y' = ay$

Les solutions de $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions :

$$y(x) = C e^{ax} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Avec condition initiale $y(0) = y_0$: unique solution $y(x) = y_0 e^{ax}$.

✍ Démonstration | Exigible au bac

Vérifions que $y(x) = C e^{ax}$ est solution : $y'(x) = C a e^{ax} = a \cdot C e^{ax} = a y(x).$

Unicité : Soit y une solution. Posons $g(x) = y(x) e^{-ax}$.

$$g'(x) = y'(x) e^{-ax} + y(x) (-a) e^{-ax} = e^{-ax} (y'(x) - a y(x)) = 0$$

car $y' = ay$. Donc g est constante : $g(x) = g(0) = y(0) = C$. D'où $y(x) = C e^{ax}$.

 Exemple | Applications

Radioactivité : $N'(t) = -\lambda N(t)$, $N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Demi-vie : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \iff t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Pour le carbone 14 : $t_{1/2} \approx 5730$ ans.

Refroidissement : $T'(t) = -k(T(t) - T_a)$, en posant $u = T - T_a$: $u' = -ku$, $u(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt}$.

 Attention | Ne pas confondre $y' = ay$ et $y' = ay + b$

$y' = ay + b$ n'est **pas** au programme de Terminale (elle le sera en prépa). Mais la méthode est similaire : la solution est $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. $e^x > 0$ **toujours** : le signe d'une expression avec e^x dépend du **reste**, pas de e^x .
2. **Factoriser par e^x** : $f(x) = (ax + b)e^x \Rightarrow$ le signe de f est celui de $ax + b$.
3. **Croissances comparées** : en $+\infty$, e^x bat tout polynôme. En $-\infty$, $x^n e^x \rightarrow 0$.
4. **Poser $X = e^x$** : dès que tu vois $e^{2x} = (e^x)^2$, pense changement de variable.
5. **Dériver e^u** : n'oublie pas le u' devant : $(e^u)' = u'e^u$.
6. **Primitiver $u'e^u$** : c'est $e^u + C$.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...	Tu penses à...
« résoudre $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ »	$f(x) = g(x)$ (injectivité)
« $e^{2x} + \dots e^x + \dots = 0$ »	poser $X = e^x > 0$
« croissance/décroissance exponentielle »	$y' = ay$, $y = Ce^{ax}$
« demi-vie, temps de doublement »	$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$
« $f(x) = P(x)e^{g(x)}$ »	dérivée produit + $(e^u)' = u'e^u$
« limite de $P(x)e^x$ »	croissances comparées
« tangente à la courbe de e^x »	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $f'(a) = e^a$

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Écrire $e^{a+b} = e^a + e^b$** . C'est un **produit** : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
2. **Dire que e^x peut être négatif ou nul**. Jamais : $e^x > 0$ pour tout x .
3. **Oublier u' dans $(e^u)'$** . $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, pas e^{3x} .
4. **Confondre e^{x^2} et $(e^x)^2 = e^{2x}$** . Dessine l'arbre de la composition pour éviter.
5. **Oublier $X > 0$ en posant $X = e^x$** . On élimine les racines négatives.

 Méthode | Récapitulatif des formules

Résultat	Formule
Définition	$(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$ (unique solution de $f' = f$, $f(0) = 1$)
Relation fonctionnelle	$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
Dérivée composée	$(e^u)' = u' e^u$
Limites	$\lim_{-\infty} e^x = 0$, $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$
Taux d'accroissement	$\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$
Croiss. comparée	$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$, $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$
Inégalité fondamentale	$e^x \geq x + 1$ pour tout x
Éq. diff.	$y' = ay \Rightarrow y = Ce^{ax}$
Base a	$a^x = e^{x \ln a}$, $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

5 Exercices

Exercice 1 — Simplifications

Simplifier sans calculatrice :

a) $e^2 \cdot e^3$

b) $\frac{e^5}{e^2}$

c) $(e^{-1})^4$

d) $e^{\ln 7}$

e) $\sqrt{e^6}$

f) $e^{2 \ln 3 + \ln 4}$

Exercice 2 — Équations élémentaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x-2} = 1$

b) $e^{x^2} = e^4$

c) $e^{2x} = 5$

d) $3e^x - 12 = 0$

Exercice 3 — Inéquations élémentaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x-1} > 1$

b) $e^{-x} \leq e^3$

c) $e^x < 7$

d) $e^{x^2} \geq e^9$

Exercice 4 — Équations avec changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

b) $e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$

c) $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$

d) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

Exercice 5 — Dérivées

Calculer la dérivée :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $g(x) = (3x - 1)e^{-2x}$

c) $h(x) = e^{x^2-3x+1}$

d) $k(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad (x \neq -1)$

Exercice 6 — Limites

Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x)e^{-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$

- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{e^x + 1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

Exercice 7 ★★☆☆ — Étude de $f(x) = xe^{-x}$

- Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet.
- Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$.
- Montrer que l'équation $f(x) = k$ a exactement deux solutions si et seulement si $0 < k < \frac{1}{e}$.

Exercice 8 ★★☆☆ — Étude de $f(x) = (1 - x)e^x$

- Limites en $\pm\infty$.
- Dérivée, variations, maximum.
- Position par rapport à l'axe des x .
- Équation de la tangente au point d'inflexion.

Exercice 9 ★★☆☆ — Inégalité $e^x \geq x + 1$

- Démontrer que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$.

Indication : étudier $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$ en utilisant a).

- Encadrer e en utilisant b) avec des valeurs de x .

Exercice 10 ★★☆☆ — Équation différentielle

- Résoudre $y' = -3y$, $y(0) = 5$.
- Résoudre $y' = 2y$, $y(1) = e^2$.
- Un médicament se dégrade selon $Q'(t) = -0,15 Q(t)$, $Q(0) = 500$ mg. Exprimer $Q(t)$, puis déterminer la demi-vie.

Exercice 11 ★★☆☆ — Primitives et intégrales

Calculer :

- $\int_0^1 e^{2x} dx$
- $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$
- $\int_0^1 xe^{x^2} dx$
- Primitive de $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$.

Exercice 12 ★★☆☆ — Démonstrations de cours

- Démontrer la relation fonctionnelle $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
- Démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Démontrer que les solutions de $y' = ay$ sont $y = Ce^{ax}$.

Exercice 13 ★★ ★ — Suite et exponentielle

$$u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + e^{-u_n}).$$

- a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout n .
- b) Montrer que (u_n) est décroissante.
- c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 ★★ ★ — Tangentes passant par l'origine

Déterminer toutes les tangentes à la courbe $y = e^x$ passant par l'origine.

6 🐼 Problème — L'exponentielle par les séries ★★

🔥 Problème style prépa

Ce problème construit l'exponentielle à partir de sa **série entière**, établit ses propriétés par cette voie et explore la convergence de suites liées à e .

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Partie A — Convergence

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \geq 2|x|$: $\left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{2^{k/2}}$.

Indication : pour $k \geq 2|x|$, $\frac{|x|}{k} \leq \frac{1}{2}$.

2. En déduire que la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note $E(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Calculer $E(0)$ et $E(1)$.

Partie B — E vérifie $E' = E$

4. Calculer $S'_n(x)$ et montrer que $S'_n(x) = S_{n-1}(x)$.
5. (Admis en terminale) En déduire que $E'(x) = E(x)$.
6. Vérifier que $E(0) = 1$. Conclure que $E = \exp$.

Partie C — Relation fonctionnelle par les séries

7. (Difficile) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $S_n(a+b) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \frac{a^i b^{j-i}}{i!(j-i)!}$.
8. En déduire que $E(a+b) = E(a) \cdot E(b)$. Interpréter.

Partie D — Irrationalité de e

9. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $0 < e - S_n(1) < \frac{1}{n! \cdot n}$.

Indication : majorer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ par une série géométrique.

10. Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $q!e - q!S_q(1)$ est un entier.
11. En déduire une contradiction en utilisant la question 9, et conclure que e est irrationnel.

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

- a) $e^2 \cdot e^3 = e^{2+3} = e^5$.
- b) $\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$.
- c) $(e^{-1})^4 = e^{-4}$.
- d) $e^{\ln 7} = 7$ (car $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$).
- e) $\sqrt{e^6} = e^{6/2} = e^3$.
- f) $e^{2 \ln 3 + \ln 4} = e^{\ln 3^2} \cdot e^{\ln 4} = 9 \times 4 = 36$.

Exercice 2

- a) $e^{3x-2} = 1 = e^0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.
- b) $e^{x^2} = e^4 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$.
- c) $e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{2}$.
- d) $3e^x = 12 \iff e^x = 4 \iff x = \ln 4 = 2 \ln 2$.

Exercice 3

- a) $e^{2x-1} > 1 = e^0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. $S =]\frac{1}{2}, +\infty[$.
- b) $e^{-x} \leq e^3 \iff -x \leq 3 \iff x \geq -3$. $S = [-3, +\infty[$.
- c) $e^x < 7 \iff x < \ln 7$. $S =]-\infty, \ln 7[$.
- d) $e^{x^2} \geq e^9 \iff x^2 \geq 9 \iff |x| \geq 3 \iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$. $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 4

- a) $X = e^x > 0$. $X^2 - 5X + 4 = 0$, $(X - 1)(X - 4) = 0$, $X = 1$ ou $X = 4$. $x = 0$ ou $x = \ln 4 = 2 \ln 2$.
- b) $X^2 + 3X - 10 = 0$, $(X + 5)(X - 2) = 0$. Seul $X = 2 > 0$. $x = \ln 2$.
- c) $2X^2 - 7X + 3 = 0$. $\Delta = 49 - 24 = 25$. $X = \frac{7 \pm 5}{4}$, soit $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$. Les deux sont > 0 . $x = \ln 3$ ou $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.
- d) $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Posons $Y = 2^x > 0$. $Y^2 - 3Y - 4 = 0$, $(Y - 4)(Y + 1) = 0$. Seul $Y = 4 > 0$. $2^x = 4 = 2^2$, $x = 2$.

Exercice 5

- a) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = x(x + 2)e^x$.
- b) $g'(x) = 3e^{-2x} + (3x - 1)(-2)e^{-2x} = (3 - 6x + 2)e^{-2x} = (5 - 6x)e^{-2x}$.
- c) $u(x) = x^2 - 3x + 1$, $u'(x) = 2x - 3$. $h'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x + 1}$.
- d) $k'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

Exercice 6

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x}{e^x} = 0$ (croissance comparée : e^x bat x^3).
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$. Posons $t = -x \rightarrow +\infty$: $(t^2 + 1)e^{-t} = \frac{t^2 + 1}{e^t} \rightarrow 0$.
- c) $\frac{e^x - x^2}{e^x + 1} = \frac{1 - x^2/e^x}{1 + 1/e^x} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$.
- d) $e^x - e^{-x} = e^x(1 - e^{-2x}) \rightarrow +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$.
- e) $\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}$. En posant $u = 2x \rightarrow 0$: $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$, donc la limite est 2.

Exercice 7

$$f(x) = xe^{-x}.$$

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x}$. Posons $t = -x \rightarrow +\infty$: $f = -te^t \rightarrow -\infty$ (car $te^t \rightarrow +\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée).}$$

- b) $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$: signe de f' = signe de $1 - x$.

$f'(x) > 0$ pour $x < 1$, $f'(x) = 0$ pour $x = 1$, $f'(x) < 0$ pour $x > 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

Maximum : $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

- c) $f(0) = 0$, $f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1$. Tangente : $y = x$.

- d) $f(x) = k$. D'après le tableau, f atteint le maximum $\frac{1}{e}$.

Si $k > \frac{1}{e}$: aucune solution (k au-dessus du max).

Si $k = \frac{1}{e}$: exactement une solution ($x = 1$).

Si $0 < k < \frac{1}{e}$: la droite $y = k$ coupe la courbe une fois sur $] -\infty, 1[$ (croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$) et une fois sur $]1, +\infty[$ (décroissante de $\frac{1}{e}$ à 0). Total : **exactement 2 solutions**.

Si $k = 0$: unique solution $x = 0$.

Si $k < 0$: unique solution (car f va de $-\infty$ à 0, croissante jusqu'à $x = 1$).

Exercice 8

$$f(x) = (1 - x)e^x.$$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^x$. On écrit $f(x) = e^x - xe^x$. Or $e^x \rightarrow +\infty$ et $xe^x \rightarrow +\infty$: forme $+\infty - \infty$. Factorisons : $f(x) = e^x(1 - x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Plus rigoureusement : pour $x \geq 2$, $1 - x \leq -1$ donc $f(x) \leq -e^x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^x$. $(1 - x) \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow 0$. Forme $+\infty \cdot 0$. Écrivons $f(x) = e^x - xe^x$, et $xe^x \rightarrow 0$ (variante 2 des croissances comparées). Donc $f(x) \rightarrow 0 - 0 = 0$.

Asymptote $y = 0$ en $-\infty$.

- b) $f'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = (-1 + 1 - x)e^x = -xe^x$. Signe de f' = signe de $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1 $\searrow$	$-\infty$

Maximum : $f(0) = (1 - 0)e^0 = 1$.

c) $f(x) = 0 \iff (1 - x)e^x = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ (car $e^x \neq 0$). Pour $x < 1$: $f > 0$. Pour $x > 1$: $f < 0$.

d) $f''(x) = -e^x - xe^x = -(1 + x)e^x$. $f''(x) = 0 \iff x = -1$.

Point d'inflexion en $(-1, f(-1)) = (-1, 2e^{-1})$.

Tangente : $f'(-1) = -(-1)e^{-1} = e^{-1}$. $y = e^{-1}(x + 1) + 2e^{-1} = e^{-1}(x + 3)$.

Exercice 9

a) $f(x) = e^x - x - 1$. $f'(x) = e^x - 1$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$. $f' < 0$ sur $] -\infty, 0[$, $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Minimum $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$: $e^x \geq x + 1$ pour tout x .

b) $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$. $g'(x) = e^x - 1 - x$.

Par a), $e^x \geq x + 1$, donc $g'(x) = e^x - 1 - x \geq (x + 1) - 1 - x = 0$ pour tout x .

Ainsi $g' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$: g est croissante. Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.

D'où $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

c) $x = 1$: $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$. On sait aussi $e < 3$.

On peut aller plus loin par le même raisonnement : en posant $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, on montre $h'(x) = g(x) \geq 0$, etc. Pour $x = 1$: $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \approx 2,667$.

Avec un terme de plus : $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2,708$. Ceci converge vers $e \approx 2,718$.

Exercice 10

a) $y' = -3y$, $y(0) = 5$. Solutions de $y' = -3y$: $y(x) = Ce^{-3x}$. $y(0) = C = 5$. Donc $y(x) = 5e^{-3x}$.

b) Solutions de $y' = 2y$: $y(x) = Ce^{2x}$. $y(1) = Ce^2 = e^2$, donc $C = 1$. $y(x) = e^{2x}$.

c) $Q(t) = 500e^{-0,15t}$ (mg).

Demi-vie : $Q(t_{1/2}) = 250 \iff e^{-0,15t} = \frac{1}{2} \iff -0,15t = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,15} \approx 4,62$ h.

Exercice 11

a) $\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

b) $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{u'}{u}$ avec $u = e^x + 1$. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = \ln(2 + 1) - \ln(1 + 1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$.

c) $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2x e^{x^2} = \frac{1}{2} u' e^u$ avec $u = x^2$. $\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{e - 1}{2}$.

d) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$. $(2x + 1)e^{x^2 + x} = u' e^u$. Primitive : $F(x) = e^{x^2 + x} + C$.

Exercice 12

a) Fixons $a \in \mathbb{R}$. Posons $g(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x}$.

$$g'(x) = e^{a+x} \cdot e^{-x} + e^{a+x} \cdot (-e^{-x}) = 0.$$

g constante : $g(x) = g(0) = e^a \cdot 1 = e^a$. Pour $x = b$: $e^{a+b} \cdot e^{-b} = e^a$, d'où $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

b) De $e^x \geq x + 1$, pour $t \geq 0$: $e^{t/2} \geq 1 + \frac{t}{2} \geq \frac{t}{2}$, donc $e^t = (e^{t/2})^2 \geq \frac{t^2}{4}$.

Ainsi $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$ pour $x > 0$, et $\frac{x}{4} \rightarrow +\infty$. D'où $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$.

c) Soit y solution de $y' = ay$. Posons $g(x) = y(x)e^{-ax}$.

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0 \text{ car } y' = ay.$$

g constante : $g(x) = C$. Donc $y(x) = Ce^{ax}$. Réciproquement, $y = Ce^{ax}$ vérifie $y' = aCe^{ax} = ay$.

Exercice 13

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x}), \quad u_0 = 1, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Si $u_n > 0$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + e^{-u_n}) > \frac{1}{2}(0 + e^{-u_n}) > 0$ (car $e^{-u_n} > 0$). Par récurrence : $u_n > 0$ pour tout n .

$$b) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + e^{-u_n}) - u_n = \frac{1}{2}(e^{-u_n} - u_n).$$

Posons $\varphi(x) = e^{-x} - x$. $\varphi'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$: φ strictement décroissante. $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = e^{-1} - 1 \approx -0,63 < 0$. Par le TVI : φ s'annule en un unique $\alpha \in]0, 1[$.

Pour $x > \alpha$: $\varphi(x) < 0$, donc $e^{-x} < x$.

Or $u_0 = 1 > \alpha$ et on peut montrer par récurrence que $u_n > \alpha$ pour tout n (car $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + e^{-\alpha}) = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \alpha$ et f est croissante au voisinage de α). Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\varphi(u_n) < 0$: (u_n) décroissante.

c) (u_n) décroissante et minorée par $\alpha > 0$, donc converge vers $\ell \geq \alpha$. Par continuité de f : $\ell = f(\ell) = \frac{1}{2}(\ell + e^{-\ell})$, soit $\ell = e^{-\ell}$, i.e. $\ell e^{\ell} = 1$. C'est l'unique point fixe $\alpha \approx 0,567$ (constante Ω de Lambert).

Exercice 14

On cherche les tangentes à $y = e^x$ passant par $O(0, 0)$.

La tangente en $x = a$: $y = e^a(x - a) + e^a = e^a(x - a + 1)$.

Passage par O : $0 = e^a(0 - a + 1)$. Comme $e^a \neq 0$: $-a + 1 = 0$, soit $a = 1$.

Unique tangente : $y = e(x - 1 + 1) = ex$.

Vérification : la droite $y = ex$ est bien tangente en $(1, e)$ avec pente $e^1 = e$.

Corrigé du problème**Partie A — Convergence**

1. Pour $k \geq 2|x|$: $\frac{|x|}{k} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$.

$\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$. Écrivons $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$. Pour les facteurs $j \geq 2|x|$: $\frac{|x|}{j} \leq \frac{1}{2}$. Il y a au moins $k - \lfloor 2|x| \rfloor$ tels facteurs. Pour k assez grand (disons $k \geq N = \lceil 2|x| \rceil$) :

$$\frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \prod_{j=N+1}^k \frac{|x|}{j} \leq \frac{|x|^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N}$$

Comme $\frac{|x|^N}{N!}$ est une constante et $(\frac{1}{2})^{k-N} \rightarrow 0$, le terme général tend vers 0. Plus précisément, $|\frac{x^k}{k!}| \leq M \cdot 2^{-k}$ pour une constante M , d'où la majoration demandée (quitte à ajuster).

2. Comme $\sum \frac{1}{2^{k/2}} = \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^k$ est une série géométrique convergente (raison $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$), par comparaison la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge absolument.

3. $E(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0^k}{k!} = 1$ (tous les termes sont nuls sauf $k = 0$).

$$E(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \approx 2,71828 = e.$$

Partie B — E vérifie $E' = E$

4. $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, donc $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. En reindexant $j = k - 1$: $S'_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = S_{n-1}(x)$.

5. (Admis) En passant à la limite : $E'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}(x) = E(x)$.

6. $E(0) = 1$ et $E' = E$. Par l'unicité du théorème fondamental : $E = \exp$.

Partie C — Relation fonctionnelle

7. Par le binôme de Newton : $(a + b)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} a^i b^{j-i}$. Donc :

$$\frac{(a + b)^j}{j!} = \sum_{i=0}^j \frac{1}{j!} \binom{j}{i} a^i b^{j-i} = \sum_{i=0}^j \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{j-i}}{(j-i)!}$$

car $\frac{1}{j!} \binom{j}{i} = \frac{1}{i!(j-i)!}$. En sommant pour $j = 0, \dots, n$:

$$S_n(a + b) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{j-i}}{(j-i)!}$$

8. Quand $n \rightarrow +\infty$, cette double somme converge vers $(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!}) \cdot (\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b^m}{m!}) = E(a) \cdot E(b)$ (produit de Cauchy de séries absolument convergentes).

Conclusion : $E(a + b) = E(a) \cdot E(b)$, ce qui redonne la relation fonctionnelle $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

Partie D — Irrationalité de e

9. $e - S_n(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Pour $k \geq n + 1$:

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}}$$

(car chaque facteur au dénominateur est $\geq n + 1$). En sommant :

$$e - S_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n! \cdot n}$$

(série géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$). Et $e - S_n(1) > 0$ car tous les termes sont positifs.

10. Si $e = \frac{p}{q}$, posons $N = q!e - q!S_q(1) = q!(\frac{p}{q} - S_q(1))$.

$q!S_q(1) = q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$. Chaque terme $\frac{q!}{k!}$ est un entier (car $k \leq q$). Donc $q!S_q(1) \in \mathbb{N}$.

$q!e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$. Donc $N = q!e - q!S_q(1)$ est un entier.

11. Par la question 9 avec $n = q$: $0 < e - S_q(1) < \frac{1}{q! \cdot q}$, donc $0 < q!(e - S_q(1)) < \frac{1}{q}$.

Ainsi $0 < N < \frac{1}{q} \leq 1$. Mais N est un entier positif : $N \geq 1$, ce qui contredit $N < 1$.

Conclusion : e est irrationnel.

Fin de la Fiche 10 — Fonction exponentielle

Tu maîtrises maintenant la définition ($f' = f$, $f(0) = 1$), la relation fonctionnelle, les limites, les croissances comparées, la dérivée de e^u , les équations différentielles $y' = ay$, et les équations avec changement de variable.

Le logarithme népérien, réciproque de l'exponentielle, est l'objet de la fiche suivante.

→ **Fiche 11 : Fonction logarithme népérien.**