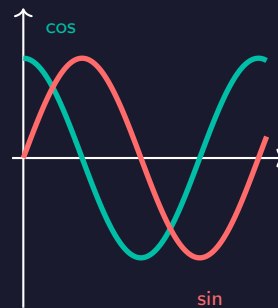
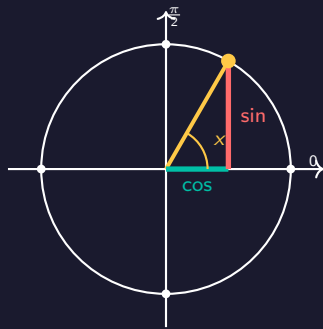


Fonctions trigonométriques

Cercle trigonométrique ■ Cosinus & sinus ■ Dérivées & équations



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



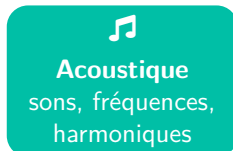
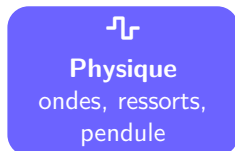
Table des matières

1	🔍	Pourquoi étudier les fonctions trigonométriques ?	3
1.1		Le problème fondamental	3
1.2		L'idée directrice	3
2	🧠	L'idée avant la formule	4
2.1		Le cercle trigonométrique	4
2.2		Radian vs degré	4
2.3		Les valeurs remarquables	4
2.4		Périodicité et symétries	5
3	🎓	Le cours formel	6
3.1		Définitions et relation fondamentale	6
3.2		Périodicité et parité	6
3.3		Formules de symétrie sur le cercle	7
3.4		Formules d'addition	8
3.5		Dérivées de cos et sin	9
3.6		Dérivées de $\cos u$ et $\sin u$	10
3.7		Étude complète de cos et sin sur $[0, 2\pi]$	10
3.8		La fonction tangente	11
3.9		Équations trigonométriques	11
3.10		Limites de référence	12
3.11		Primitives des fonctions trigonométriques	12
4	🧰	Boîte à outils — Réflexes pour le bac	14
5	✎	Exercices	16
6	🔑	Problème — Polynômes de Tchebychev et approximation trigonométrique ★★ ★	19
7	✔	Corrigés détaillés	20

1 ? Pourquoi étudier les fonctions trigonométriques ?

1.1 Le problème fondamental

Comment décrire un mouvement **périodique** ? Une oscillation, une vibration, une onde ? Les fonctions polynômes et exponentielles ne suffisent pas : elles ne reviennent jamais à leur point de départ. Il faut des fonctions qui se **répètent indéfiniment** : c'est le rôle de $\cos$ et $\sin$.



En physique : le mouvement d'un pendule s'écrit $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$. La position d'une masse sur un ressort : $x(t) = A \cos(\omega t)$.

En électricité : le courant domestique est $i(t) = I_0 \sin(2\pi \times 50 \times t)$ à 50 Hz en France.

En traitement du signal : toute fonction périodique se décompose en somme de sinus et cosinus (série de Fourier). C'est le fondement du MP3, du JPEG, de la compression audio et vidéo.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

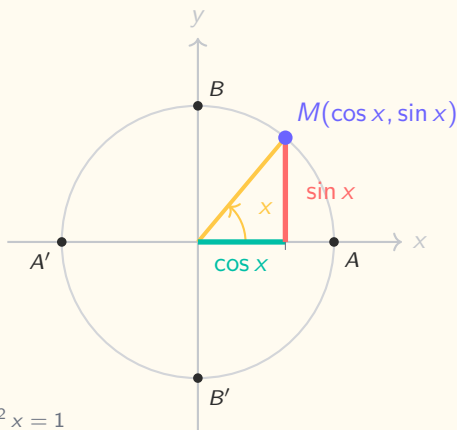
Cosinus et sinus sont les **coordonnées d'un point sur le cercle unité**. Ils héritent de la géométrie du cercle toutes leurs propriétés : **périodicité**, **parité**, **bornés entre -1 et 1** , et la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

2 L'idée avant la formule

2.1 Le cercle trigonométrique

Intuition | Le cercle unité orienté

On considère le cercle de centre O et de rayon 1, muni du sens direct (sens anti-horaire). Un point M sur ce cercle est repéré par l'**angle** x (en radians) mesuré depuis le point $A(1, 0)$:



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos x$ est l'**abscisse** de M , $\sin x$ est l'**ordonnée** de M .

Le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle donne immédiatement : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

2.2 Radian vs degré

Intuition | Pourquoi les radians ?

Un **radian** est l'angle qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle de rayon 1.

Tour complet = 2π radians = 360° . Donc π rad = 180° .

Conversion :

— Degrés $\rightarrow$ radians : multiplier par $\frac{\pi}{180}$.

— Radians $\rightarrow$ degrés : multiplier par $\frac{180}{\pi}$.

Pourquoi les radians au bac ? Parce que les formules de dérivation ne marchent **qu'en radians** : $(\sin x)' = \cos x$ est faux en degrés. C'est la raison profonde : le radian est l'unité « naturelle » de l'angle.

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π

2.3 Les valeurs remarquables

Intuition | Le tableau à connaître par cœur ♥

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Astuce mnémotechnique : $\cos$ décroît de 1 à 0 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; $\sin$ fait l'inverse. Les valeurs sont $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$:

$$\cos 0 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0.$$

Et $\sin$ dans l'ordre inverse.

2.4 Périodicité et symétries

Intuition | Périodicité

Après un tour complet (2π), on revient au même point. Donc :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$\cos$ et $\sin$ sont **périodiques de période 2π** . Pour étudier ces fonctions, il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.

3 Le cours formel

3.1 Définitions et relation fondamentale

Définition | Cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point M du cercle trigonométrique tel que l'arc $\widehat{AM} = x$ (en radians, dans le sens direct). Les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$M(\cos x, \sin x)$$

$\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, à valeurs dans $[-1, 1]$.

★ Théorème | Relation fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Démonstration

$M(\cos x, \sin x)$ est sur le cercle de rayon 1, donc $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1^2 = 1$.

✓ Propriété | Bornes

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

De plus, $|\cos x| = 1 \iff \sin x = 0$ et $|\sin x| = 1 \iff \cos x = 0$.

3.2 Périodicité et parité

✓ Propriété | Périodicité

$\cos$ et $\sin$ sont **périodiques de période 2π** :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

2π est la **plus petite** période strictement positive.

✓ Propriété | Parité

$\cos$ est **paire** : $\cos(-x) = \cos x$.

$\sin$ est **impaire** : $\sin(-x) = -\sin x$.

Démonstration

Sur le cercle, passer de l'angle x à $-x$ revient à faire la symétrie par rapport à l'axe Ox . L'abscisse ($\cos$) ne change pas, l'ordonnée ($\sin$) change de signe.

✓ Propriété | Conséquences pour l'étude

Par périodicité, on se ramène à $[0, 2\pi]$. Par parité de $\cos$, on l'étudie sur $[0, \pi]$. Par imparité de $\sin$, on l'étudie sur $[0, \pi]$, puis on complète par symétrie.

3.3 Formules de symétrie sur le cercle

✓ Propriété | Angles associés — le tableau essentiel

Transformation	Angle	$\cos$	$\sin$
Opposé	$-x$	$\cos x$	$-\sin x$
Supplémentaire	$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$
Complément à 2π	$2\pi - x$	$\cos x$	$-\sin x$
Décalage de π	$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$
Décalage de $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$
Décalage de $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$

Démonstration | Des formules par la géométrie du cercle

$\pi - x$: la symétrie par rapport à l'axe Oy envoie l'angle x sur $\pi - x$. L'abscisse change de signe, l'ordonnée est conservée : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

$\pi + x$: la symétrie par rapport à l'origine envoie M sur son opposé : les deux coordonnées changent de signe.

$\frac{\pi}{2} - x$: la symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange abscisse et ordonnée.

Exemple | Applications

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Méthode | Comment retrouver les valeurs de $\cos$ et $\sin$ pour tout angle

1. **Ramener dans $[0, 2\pi[$** : ajouter ou retrancher 2π autant que nécessaire.
2. **Se ramener au premier quadrant $[0, \frac{\pi}{2}]$** : utiliser les angles associés.
3. **Lire le tableau des valeurs remarquables.**

3.4 Formules d'addition

★ Théorème | Formules d'addition (admisses)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

✓ Propriété | Formules dérivées

Différence :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Angle double ($b = a$) :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration | Des formules de l'angle double

On pose $b = a$ dans les formules d'addition :

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\text{Variante 1 : } = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1.$$

$$\text{Variante 2 : } = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a.$$

✓ Propriété | Formules de linéarisation (utiles en intégration)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Démonstration

$$\text{De } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 : \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\text{De } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x : \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Exemple | Calculs types

$$1. \cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$2. \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$3. \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

3.5 Dérivées de cos et sin

★ Théorème | Dérivées fondamentales

cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Démonstration | Exigible au bac — pour sin

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

On admet que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Donc $(\sin x)' = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$.

Pour cos : idem, ou bien dériver $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ par la règle de la chaîne : $(\cos x)' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot 1 = \dots$ Non, plus directement :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \rightarrow -\sin x.$$

✓ Propriété | Limites fondamentales en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

La première est le taux d'accroissement de sin en 0 : $\frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} \rightarrow \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

La seconde est le taux d'accroissement de cos en 0 : $\frac{\cos h - \cos 0}{h} \rightarrow \cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

Démonstration | De $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ — preuve géométrique (culture)

Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$: l'aire du triangle inscrit $\leq$ l'aire du secteur $\leq$ l'aire du triangle exinscrit :

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

D'où $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. En faisant $x \rightarrow 0^+$: $\cos x \rightarrow 1$, donc $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ par le théorème des gendarmes. Par parité de $\frac{\sin x}{x}$, la limite est la même en 0^- .

✓ Propriété | Limite supplémentaire utile

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Démonstration

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2 \sin^2(x/2)}{x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

en utilisant $\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$ (formule de linéarisation).

3.6 Dérivées de $\cos u$ et $\sin u$

✓ Propriété | Dérivée d'une composée

Si u est dérivable sur I :

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

💡 Exemple | Dérivées à connaître

- $(\cos 3x)' = -3 \sin 3x$
- $(\sin(2x + 1))' = 2 \cos(2x + 1)$
- $(\cos(x^2))' = -2x \sin(x^2)$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ (par la règle de la chaîne sur u^2)
- $(\cos^2 x)' = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (pour $\cos x \neq 0$, voir ci-dessous)

3.7 Étude complète de $\cos$ et $\sin$ sur $[0, 2\pi]$

✓ Propriété | Variations de $\cos$ sur $[0, 2\pi]$

$$[(\cos x)' = -\sin x.$$

$\sin x > 0$ sur $]0, \pi[$ donc $\cos' < 0$: $\cos$ **décroissante** sur $[0, \pi]$.

$\sin x < 0$ sur $] \pi, 2\pi[$ donc $\cos' > 0$: $\cos$ **croissante** sur $[\pi, 2\pi]$.

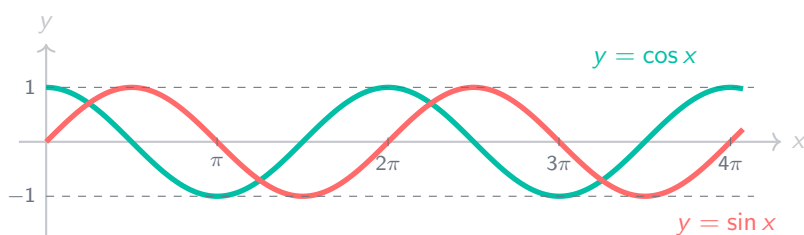
x	0	π	2π
$\cos'(x) = -\sin x$	—	0	+
$\cos x$	1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 1

✓ Propriété | Variations de $\sin$ sur $[0, 2\pi]$

$$[(\sin x)' = \cos x.$$

$\cos x > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, $\cos x < 0$ sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin'(x) = \cos x$	+	0	-	+
$\sin x$	0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 0



3.8 La fonction tangente

Définition | Tangente

Pour $\cos x \neq 0$ (i.e. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriété | Propriétés de tan

- tan est **impaire** : $\tan(-x) = -\tan x$.
- tan est **périodique de période π** : $\tan(x + \pi) = \tan x$.
- tan est **strictement croissante** sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (toujours > 0)

 *Démonstration* / De $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Par la règle du quotient :

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exemple

$$\tan 0 = 0, \quad \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1, \quad \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.9 Équations trigonométriques

Méthode | Les trois équations fondamentales

1. $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
2. $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. $\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

 *Démonstration* / De $\cos x = \cos a \iff \dots$

$\cos x = \cos a \iff \cos x - \cos a = 0$. En utilisant la factorisation : $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} = 0$.

Donc $\sin \frac{x+a}{2} = 0$ ou $\sin \frac{x-a}{2} = 0$, ce qui donne $\frac{x+a}{2} = k\pi$ ou $\frac{x-a}{2} = k\pi$, i.e. $x = -a + 2k\pi$ ou $x = a + 2k\pi$.

💡 Exemple | Équations résolues

1. $\cos x = \frac{1}{2}$. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.
3. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Posons $X = \cos x$. $2X^2 - X - 1 = 0$, $(2X + 1)(X - 1) = 0$, $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 1$. Donc $\cos x = -\frac{1}{2}$ ($x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$) ou $\cos x = 1$ ($x = 2k\pi$).
4. $\sin 2x = \sin x$. $2x = x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - x + 2k\pi$. Cas 1 : $x = 2k\pi$. Cas 2 : $3x = \pi + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

🔧 Méthode | Résoudre sur $[0, 2\pi[$ ou

$]-\pi, \pi]$ Après avoir trouvé la solution générale ($+2k\pi$), on liste les valeurs de k pour lesquelles la solution tombe dans l'intervalle demandé. Souvent $k = 0$ et $k = -1$ ou $k = 1$ suffisent.

3.10 Limites de référence

✓ Propriété | Limites en $\pm\infty$

$\cos$ et $\sin$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$ (elles oscillent entre -1 et 1).
En revanche, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$ (car $|\frac{\sin x}{x}| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0$).

💡 Exemple | Limites types

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (car $\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (admis, lié au développement de Taylor).

3.11 Primitives des fonctions trigonométriques

✓ Propriété | Primitives fondamentales

$$- \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$- \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$- \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$- \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (\text{via linéarisation})$$

$$- \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (\text{via linéarisation})$$

 Propriété | Primitives composées

Si u est dérivable :

$$— \int u' \cos u \, dx = \sin u + C$$

$$— \int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$$

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Toujours travailler en radians** : sinon les dérivées sont fausses.
2. $\cos^2 + \sin^2 = 1$: à utiliser dès qu'un $\cos^2$ ou $\sin^2$ apparaît seul.
3. **Solutions des équations trigo** : ne jamais oublier le $+2k\pi$ (ou $+k\pi$ pour $\tan$).
4. **Dériver** $\cos u$: $-u' \sin u$ (signe $-$ devant!).
5. **Dériver** $\sin u$: $u' \cos u$ (pas de signe $-$).
6. **Linéariser** avant d'intégrer $\cos^2$ ou $\sin^2$.
7. **Factoriser** les équations : $\sin 2x = \sin x \iff 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \iff \sin x(2 \cos x - 1) = 0$.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...

Tu penses à...

« résoudre $\cos x = \dots$ »	deux familles de solutions ($\pm$)
« résoudre $\sin x = \dots$ »	deux familles (a et $\pi - a$)
« $\cos^2 x + \dots$ » ou $\sin^2 x$	remplacer par $1 - \sin^2$ ou $1 - \cos^2$
« simplifier $\cos 2x$ »	trois formes au choix
« primitive de $\sin^2$ ou $\cos^2$ »	linéariser d'abord
« phénomène périodique »	$A \cos(\omega t + \varphi)$
« limite en 0 avec $\sin$ »	$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Oublier le** $+2k\pi$. $\cos x = \frac{1}{2}$ a une **infinité** de solutions, pas juste $\frac{\pi}{3}$.
2. **Confondre** $(\cos x)'$ et $(\sin x)'$. Retiens : $(\cos)' = -\sin$ (le signe $-$), $(\sin)' = \cos$ (pas de $-$).
3. **Écrire** $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$. C'est **faux**. Utilise les formules d'addition.
4. **Oublier les valeurs interdites de tan**. $\tan x$ n'existe pas en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
5. **Travailler en degrés**. Au bac, tout est en radians. $(\sin x)' = \cos x$ est faux en degrés.

 Méthode | Récapitulatif des formules

Résultat	Formule
Pythagore	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Dérivées	$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$
Périodicité	$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$
Parité	$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$
Addition	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
Addition	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
Angle double	$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
Angle double	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
Limite	$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$
Tangente	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

5 Exercices

Exercice 1 — Valeurs exactes

Calculer les valeurs exactes :

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $\cos \frac{5\pi}{3}$ | d) $\sin(-\frac{5\pi}{4})$ |
| b) $\sin \frac{7\pi}{6}$ | e) $\tan \frac{2\pi}{3}$ |
| c) $\cos \frac{3\pi}{4}$ | f) $\cos \frac{13\pi}{6}$ |

Exercice 2 — Vérification de formules

- Vérifier que $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1$.
- Vérifier la formule $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ pour $x = \frac{\pi}{6}$.
- Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ en utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 — Équations trigonométriques élémentaires

Résoudre sur $[0, 2\pi[$:

- $\cos x = 0$
- $\sin x = \frac{1}{2}$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan x = 1$

Exercice 4 — Simplifications avec formules

Simplifier :

- $\cos^2 3x + \sin^2 3x$
- $2 \cos^2 x - 1$
- $\sin x \cos x$
- $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$
- $\cos^4 x - \sin^4 x$

Exercice 5 — Équations avec changement de variable

Résoudre sur $] -\pi, \pi]$:

- $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
- $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$
- $\cos 2x = \cos x$
- $\sin 2x = \cos x$

Exercice 6 — Dérivées

Calculer la dérivée et préciser le domaine :

- $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$
- $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $h(x) = x \sin x$
- $k(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (\cos x \neq -1)$
- $\ell(x) = e^x \cos x$

Exercice 7 ★★☆☆ — **Limites**

Calculer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x}$

Exercice 8 ★★☆☆ — **Étude de $f(x) = \sin x + \cos x$**

- a) Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$.
- b) En déduire la période, l'amplitude, les zéros et les extremums de f .
- c) Dresser le tableau de variations sur $[0, 2\pi]$.
- d) Calculer $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx$.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Étude de $f(x) = \cos^2 x$**

- a) Écrire $f(x)$ sous forme linéarisée.
- b) En déduire la période de f et ses variations sur $[0, \pi]$.
- c) Calculer $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

Exercice 10 ★★☆☆ — **Primitives et intégrales**

Calculer :

- a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$
- b) $\int_0^{\pi} \cos 2x dx$
- c) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
- d) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$
- e) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ (intégration par parties)

Exercice 11 ★★☆☆ — **Démonstrations de cours**

- a) Démontrer que $(\sin x)' = \cos x$ en utilisant le taux d'accroissement.
- b) Démontrer les formules de l'angle double à partir des formules d'addition.
- c) Démontrer que $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$.

Exercice 12 ★★☆☆ — **Inégalité fondamentale**

- a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $\sin x \leq x$.
- b) Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- c) En déduire un encadrement de $\sin 0,1$ sans calculatrice.

Exercice 13 ★★ — Équation trigonométrique avancée

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Indication : remarquer que $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$.

Exercice 14 ★★★ — Étude complète de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (sinus cardinal)

- a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser la valeur.
- b) Montrer que f est paire.
- c) Étudier les limites en $\pm\infty$.
- d) Montrer que $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.
- e) Montrer que f a une infinité d'extremums locaux.

6 🦉 Problème — Polynômes de Tchebychev et approximation trigonométrique ★★ ★

🔥 Problème style prépa

Les **polynômes de Tchebychev** établissent un lien profond entre polynômes et fonctions trigonométriques : $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. Ils interviennent en approximation numérique, en théorie du signal et en compression de données.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Partie A — Construction des polynômes

1. Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ en exprimant $\cos(0 \cdot \theta)$, $\cos \theta$ et $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.
2. En utilisant $\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$ (formule à démontrer), établir la relation de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

3. Calculer $T_3(x)$ et $T_4(x)$.
4. Montrer que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Partie B — Propriétés remarquables

5. Montrer que les zéros de T_n dans $[-1, 1]$ sont $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k = 1, \dots, n$.
6. Montrer que T_n atteint alternativement les valeurs $+1$ et -1 en $n+1$ points de $[-1, 1]$ (extremums aux points $y_j = \cos \frac{j\pi}{n}$ pour $j = 0, \dots, n$).
7. En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$: $|T_n(x)| \leq 1$.

Partie C — Application : meilleure approximation polynomiale

8. Montrer que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, puis en déduire que $\cos \theta \approx \theta$ pour θ petit est amélioré par $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.
9. **(Bonus)** On veut approcher $f(x) = \cos(\pi x)$ sur $[-1, 1]$ par un polynôme de degré 2. Montrer que le polynôme de meilleure approximation uniforme est lié à T_3 .
10. **(Bonus)** Montrer que la relation $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$ (composition des polynômes de Tchebychev).

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

- a) $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- b) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
- c) $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- d) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -(-\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- e) $\tan \frac{2\pi}{3} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})}{\cos(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.
- f) $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos(\frac{13\pi}{6} - 2\pi) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

- a) $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.
- b) $\sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifie bien : $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3

- a) $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Sur $[0, 2\pi[: x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.
- b) $\sin x = \frac{1}{2}$. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Sur $[0, 2\pi[: x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.
- c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Sur $[0, 2\pi[: x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.
- d) $\tan x = 1$. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Sur $[0, 2\pi[: x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 4

- a) $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$ (relation fondamentale avec $u = 3x$).
- b) $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$ (formule de l'angle double).
- c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ (formule $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- d) $1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = \cos x$ (formule $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$).
- e) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \cdot 1 = \cos 2x$.

Exercice 5

- a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Posons $X = \cos x$. $2X^2 + X - 1 = 0$, $(2X - 1)(X + 1) = 0$, $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1$.
 $\cos x = \frac{1}{2} : x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Sur $] -\pi, \pi] : x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.
 $\cos x = -1 : x = \pi + 2k\pi$. Sur $] -\pi, \pi] : x = \pi$.
Solutions : $\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\}$.
- b) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. $Y = \sin x$. $2Y^2 - 3Y + 1 = 0$, $(2Y - 1)(Y - 1) = 0$, $Y = \frac{1}{2}$ ou $Y = 1$.
 $\sin x = \frac{1}{2} : x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ sur $] -\pi, \pi]$. $\sin x = 1 : x = \frac{\pi}{2}$.
Solutions : $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$.

c) $\cos 2x = \cos x \iff 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + 2k\pi$. Cas 1 : $x = 2k\pi$. Cas 2 : $3x = 2k\pi$, $x = \frac{2k\pi}{3}$.

Sur $] -\pi, \pi]$: $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3}$.

d) $\sin 2x = \cos x \iff 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \iff \cos x(2 \sin x - 1) = 0$.

$\cos x = 0$: $x = \pm \frac{\pi}{2}$. $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Sur $] -\pi, \pi]$: $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$.

Exercice 6

a) $f'(x) = 3 \cos(3x + \frac{\pi}{4})$.

b) $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Donc $g'(x) = -2 \sin 2x$.

Alternative directe : $g'(x) = -2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = -4 \sin x \cos x = -2 \sin 2x$.

c) $h'(x) = \sin x + x \cos x$.

d) $k'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$.

e) $\ell'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$.

Exercice 7

a) $\frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$. Posons $u = 5x \rightarrow 0$: $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$. Limite : $\frac{5}{3}$.

b) $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$.

c) $\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

d) Posons $h = x - \pi \rightarrow 0$. $\frac{\sin x}{x - \pi} = \frac{\sin(\pi + h)}{h} = \frac{-\sin h}{h} \rightarrow -1$.

e) $\frac{\sin x - \sin 2x}{x} = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

Exercice 8

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x) = \sqrt{2}(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4})$... Non, faisons plutôt :

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

b) Période : 2π . Amplitude : $\sqrt{2}$. Zéros : $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Maximum $\sqrt{2}$ atteint quand $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, i.e. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Minimum $-\sqrt{2}$ atteint quand $x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$, i.e. $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

c) $f'(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$ (factorisation similaire, ou dériver directement).

$f'(x) = 0 \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

d) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = [-\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = (-0 + 1) - (-1 + 0) = 2$.

Exercice 9

a) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ (linéarisation).

b) Période de $\cos^2 x$: celle de $\frac{1+\cos 2x}{2}$ est $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$f'(x) = -\sin 2x$. $f'(x) = 0 \iff 2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = -\sin 2x$	—	0	+
$\cos^2 x$	1	$\searrow$ 0 $\nearrow$	1

c) $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 0 - (0 + 0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$.

b) $\int_0^\pi \cos 2x \, dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = 0$.

c) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

d) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

e) IPP : $u = x$, $v' = \sin x$, $u' = 1$, $v = -\cos x$.

$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = -\pi \cos \pi + 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$.

Exercice 11

a) $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$.

$\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ et $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$. Donc $(\sin x)' = \cos x$.

b) $\cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$. Variante : $= 2\cos^2 a - 1$ (en remplaçant $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$).
 $= 1 - 2\sin^2 a$ (en remplaçant $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$).

$\sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a = \sin 2a$.

c) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En soustrayant : $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$.

Exercice 12

a) $g(x) = x - \sin x$ pour $x \geq 0$. $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ (car $\cos x \leq 1$). $g(0) = 0$ et g croissante : $g(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, i.e. $\sin x \leq x$.

b) $h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$. $h'(x) = -\sin x + x$. Par a), $-\sin x + x \geq 0$ pour $x \geq 0$, donc $h' \geq 0$.

$h(0) = 0$ et h croissante : $h(x) \geq 0$, i.e. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

c) Par a) avec $x = 0,1$: $\sin 0,1 \leq 0,1$. On peut aussi montrer $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ (même méthode en itérant) : $\sin 0,1 \geq 0,1 - \frac{0,001}{6} \approx 0,09983$.

Encadrement : $0,0998 \leq \sin 0,1 \leq 0,1$. (Valeur exacte : $\sin 0,1 \approx 0,09983$.)

Exercice 13

$$\cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cos 2x \cos x \text{ (formule de factorisation).}$$

L'équation devient $2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$, soit $\cos 2x(2 \cos x + 1) = 0$.

$$\text{Cas 1 : } \cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\text{Cas 2 : } \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Solution générale : $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 14

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On prolonge f en posant $f(0) = 1$. La fonction prolongée est continue en 0.

$$\text{b) } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) : f \text{ est paire.}$$

$$\text{c) } \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \pm\infty. \text{ Donc } \lim_{\pm\infty} f(x) = 0.$$

$$\text{d) Pour } x \neq 0 : f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

e) $f'(x) = 0 \iff x \cos x = \sin x \iff \tan x = x$ (pour $\cos x \neq 0$). L'équation $\tan x = x$ a une infinité de solutions : graphiquement, la droite $y = x$ coupe chaque branche de $\tan$ (il y a une solution dans chaque intervalle $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ pour $k \geq 1$). Chacune correspond à un extremum local de f .

Corrigé du problème**Partie A — Construction des polynômes**

$$1. T_0(\cos \theta) = \cos(0) = 1, \text{ donc } T_0(x) = 1.$$

$$T_1(\cos \theta) = \cos \theta, \text{ donc } T_1(x) = x.$$

$$T_2(\cos \theta) = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \text{ donc } T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

2. Démontrons d'abord la formule d'aide. Par les formules d'addition :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

$$\text{En additionnant : } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta.$$

D'où $\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$, ce qui donne, en posant $x = \cos \theta$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$3. T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x.$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

4. Par récurrence. T_0 est de degré 0, T_1 de degré 1 (coeff. dominant $1 = 2^0$). Supposons T_n de degré n avec coefficient dominant 2^{n-1} et T_{n-1} de degré $n-1$. Alors $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$: le terme de plus haut degré est $2x \cdot 2^{n-1}x^n = 2^n x^{n+1}$. Donc T_{n+1} est de degré $n+1$ avec coefficient dominant $2^n = 2^{(n+1)-1}$.

Partie B — Propriétés remarquables

$$5. T_n(x_k) = 0 \iff \cos(n\theta_k) = 0 \text{ où } x_k = \cos \theta_k. \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \text{ (} m \in \mathbb{Z} \text{), i.e. } \theta = \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Pour $m = 0, 1, \dots, n-1$: $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ avec $k = 1, \dots, n$ (ce qui donne n valeurs distinctes de $\theta \in]0, \pi[$). Les zéros sont $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, tous distincts dans $] -1, 1[$.

6. $T_n(y_j) = \cos(n \cdot \frac{j\pi}{n}) = \cos(j\pi) = (-1)^j$. Donc T_n vaut alternativement $+1$ et -1 aux $n+1$ points $y_j = \cos \frac{j\pi}{n}$ pour $j = 0, 1, \dots, n$. Ce sont des extremums.

7. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on peut écrire $x = \cos \theta$ pour un $\theta \in [0, \pi]$. Alors $T_n(x) = \cos(n\theta)$, et $|\cos(n\theta)| \leq 1$.

Partie C — Application

8. $\cos 3\theta = T_3(\cos \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Pour θ petit : $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ est meilleur que $\cos \theta \approx 1$ (approximation d'ordre 0). Cet encadrement provient de l'inégalité $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ démontrée dans l'exercice 12.

9. (Bonus) L'idée est que parmi tous les polynômes unitaires de degré n , celui qui s'écarte le moins de 0 sur $[-1, 1]$ est $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$. Pour $n = 3$: le polynôme unitaire de degré 3 le plus proche de 0 est $\frac{T_3(x)}{4} = x^3 - \frac{3}{4}x$. L'approximation de $\cos(\pi x)$ par un polynôme de degré 2 s'obtient en utilisant cette propriété d'optimalité de T_3 .

10. (Bonus) $T_m(T_n(\cos \theta)) = T_m(\cos(n\theta)) = \cos(m \cdot n\theta) = \cos(mn \cdot \theta) = T_{mn}(\cos \theta)$.

Comme cela vaut pour tout $\theta \in [0, \pi]$, i.e. pour tout $x = \cos \theta \in [-1, 1]$, et que deux polynômes coïncidant sur un intervalle sont égaux, on a $T_m \circ T_n = T_{mn}$.

Fin de la Fiche 12 — Fonctions trigonométriques

Tu maîtrises maintenant le cercle trigonométrique, les valeurs remarquables, les formules d'addition et d'angle double, les dérivées de cos et sin, les équations trigonométriques, la tangente, les primitives et la linéarisation.

Ces outils sont fondamentaux en physique (ondes, oscillations), en géométrie et en analyse (séries de Fourier).

→ Prochaine fiche : Primitives & intégration.