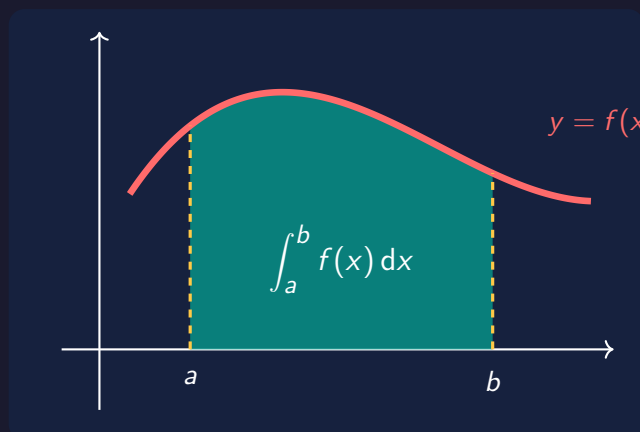


Primitives & Intégration

Primitives ■ Intégrale ■ Calcul d'aires ■ Intégration par parties



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

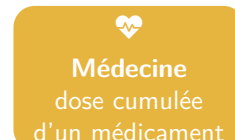
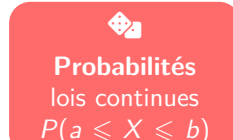
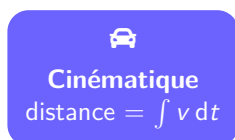
1	 Pourquoi étudier les primitives et l'intégration ?	3
1.1	Le problème fondamental : inverser la dérivation	3
1.2	Des exemples concrets	3
1.3	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Dérivation vs intégration : les deux faces d'une pièce	4
2.2	L'intégrale comme aire : l'intuition géométrique	4
2.3	L'idée des sommes de Riemann	5
2.4	Un lien miraculeux : le théorème fondamental	6
3	 Le cours formel	7
3.1	Primitives : définition et unicité	7
3.2	Tableau des primitives usuelles	8
3.3	Primitives des fonctions composées	9
3.4	L'intégrale définie	10
3.5	Propriétés de l'intégrale	11
3.6	Valeur moyenne d'une fonction	12
3.7	Calcul d'aires	13
3.8	Intégration par parties (IPP)	14
3.9	Le théorème fondamental de l'analyse	15
3.10	Sommes de Riemann	16
3.11	Inégalités intégrales et encadrements	17
4	 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	18
5	 Exercices	20
6	 Problème — Inégalités intégrales et approximation de π ★★ ★	23
7	 Corrigés détaillés	24

1 ? Pourquoi étudier les primitives et l'intégration ?

1.1 Le problème fondamental : inverser la dérivation

On sait dériver : passer de f à f' . Mais comment faire le chemin **inverse** ? Connaissant la vitesse $v(t)$, comment retrouver la position $x(t)$? Connaissant le débit d'eau d'un robinet $q(t)$ (en litres/seconde), comment calculer le volume total écoulé entre $t = 0$ et $t = T$?

Ce problème inverse est celui de la **primitivation**. L'**intégrale** fournit alors un outil puissant pour calculer des aires, des volumes, des moyennes, des quantités accumulées.



1.2 Des exemples concrets

En cinématique : un objet a la vitesse $v(t) = 3t^2$ m/s. La distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 2$ est $d = \int_0^2 3t^2 \, dt = [t^3]_0^2 = 8$ m. La primitive de la vitesse donne la position.

En probabilités : la probabilité qu'une variable aléatoire continue X de densité f tombe entre a et b est $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx$. La loi normale, la loi exponentielle, la loi uniforme utilisent toutes des intégrales.

En économie : le surplus du consommateur, la valeur actuelle nette d'un investissement, le coefficient de Gini pour mesurer les inégalités s'expriment comme des intégrales.

En physique : le travail d'une force variable $F(x)$ le long d'un déplacement est $W = \int_a^b F(x) \, dx$. L'énergie potentielle gravitationnelle, la pression hydrostatique, le moment d'inertie sont tous des intégrales.

1.3 L'idée directrice

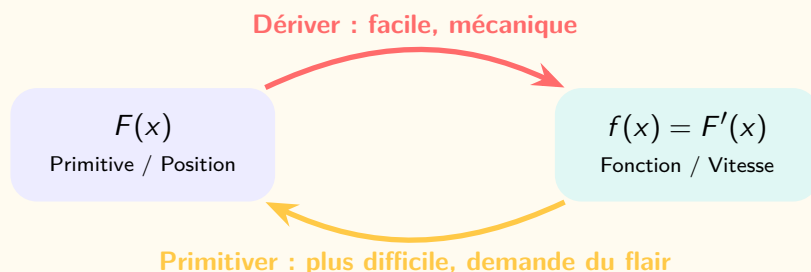
L'idée directrice :

Dériver et **intégrer** sont des opérations **inverses** l'une de l'autre. La primitive est l'« antidérivée », et le **théorème fondamental de l'analyse** fait le pont entre les deux mondes : $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Ce résultat, dû à Newton et Leibniz, est l'un des plus importants de toute l'histoire des mathématiques.

2 🧠 L'idée avant la formule

2.1 Dérivation vs intégration : les deux faces d'une pièce

🧠 Intuition | Le chemin aller-retour



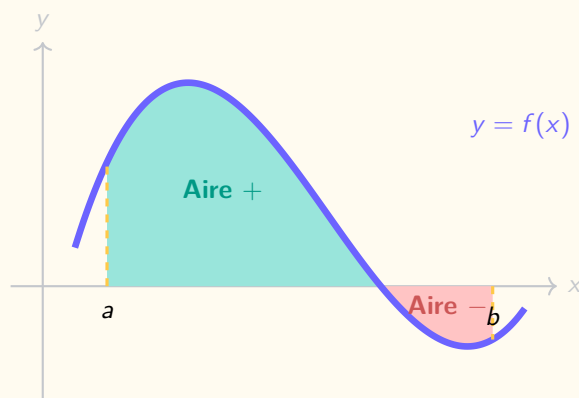
Dériver va de F vers $f = F'$. C'est un procédé **mécanique** : on applique des règles. Primitives fait le chemin inverse : trouver F tel que $F' = f$. C'est plus **subtil** : il faut reconnaître des formes.

Analogie physique : dériver, c'est passer de la position à la vitesse. Primitives, c'est retrouver la position à partir de la vitesse. Mais attention : si tu connais la vitesse, tu ne connais pas le point de départ. C'est pourquoi la primitive n'est définie qu'à une **constante près**.

2.2 L'intégrale comme aire : l'intuition géométrique

🧠 Intuition | L'aire sous la courbe 🏠

$\int_a^b f(x) dx$ mesure l'« aire algébrique » entre la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales $x = a$, $x = b$.



Crucial : l'intégrale est **algébrique**. L'aire au-dessus de l'axe Ox est comptée **positivement**, celle en dessous est comptée **négativement**. Pour obtenir l'aire « géométrique » (toujours positive), il faut intégrer $|f|$, pas f .

2.3 L'idée des sommes de Riemann

Intuition | Approcher l'aire par des rectangles

L'idée fondatrice est simple : pour calculer l'aire sous une courbe, on la découpe en **rectangles** dont on sait calculer l'aire, puis on fait la somme.

Étape 1 : découper l'intervalle. On découpe $[a, b]$ en n petits intervalles de même largeur. La largeur de chaque intervalle est :

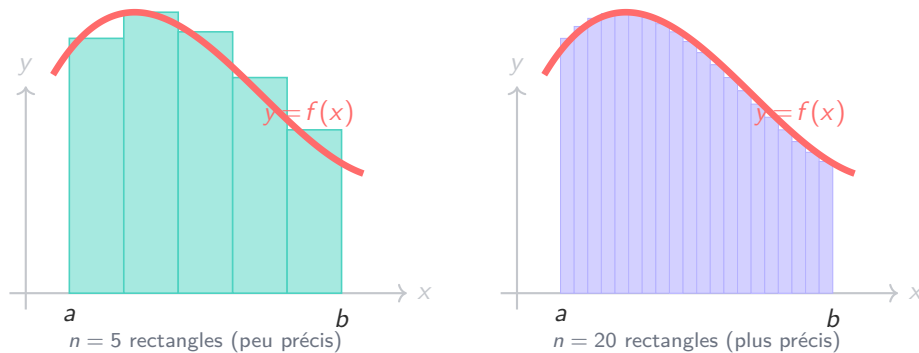
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Les points de subdivision sont : $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_k = a + k\Delta x$, ..., $x_n = b$.

En général : $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Étape 2 : construire les rectangles. Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on construit un rectangle de largeur Δx et de hauteur $f(x_k)$ (hauteur prise au bord **gauche**). L'aire de ce rectangle est :

$$\text{Aire du rectangle } k = f(x_k) \times \Delta x$$



Étape 3 : sommer les aires. L'aire totale approchée est la somme des aires de tous les rectangles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Étape 4 : passer à la limite. Plus n est grand, plus les rectangles sont fins, et meilleure est l'approximation. L'intégrale est la **limite** de cette somme :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Attention | Rectangles par la gauche ou par la droite ?

La formule ci-dessus utilise la hauteur au bord **gauche** (x_k). On peut aussi prendre le bord **droit** (x_{k+1}), ce qui donne $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$. Les deux sommes ont la même limite quand $n \rightarrow +\infty$: c'est l'intégrale.

 *Démonstration | Exemple concret : calculer $\int_0^1 x^2 dx$ par les sommes de Riemann*

Ici $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$. Donc $\Delta x = \frac{1}{n}$ et $x_k = \frac{k}{n}$.
La somme de Riemann (par la droite) est :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

On utilise la formule classique (démontrable par récurrence ou télescopage) :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'où :

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $S_n \rightarrow \frac{1}{3}$. Donc $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Vérification par primitive : $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \checkmark$

C'est l'idée fondatrice du calcul intégral, inventée par Archimède (méthode d'exhaustion) et formalisée par Riemann au XIX^e siècle.

2.4 Un lien miraculeux : le théorème fondamental

Intuition | Le miracle Newton-Leibniz

Le résultat le plus profond du calcul est celui-ci : pour calculer l'aire sous une courbe, **pas besoin** de sommer des rectangles à l'infini. Il suffit de trouver une primitive F de f et de calculer $F(b) - F(a)$. C'est le **théorème fondamental de l'analyse**.

Pourquoi ça marche ? Imaginons que tu remplis un bassin avec un robinet de débit $f(t)$. À l'instant t , le volume total versé est $V(t) = \int_0^t f(s) ds$. Le taux de variation du volume, c'est le débit : $V'(t) = f(t)$. Donc V est une primitive de f ! Et le volume versé entre a et b est $V(b) - V(a) = \int_a^b f$.

3 Le cours formel

3.1 Primitives : définition et unicité

Définition | Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

On dit que « F est une primitive de f » ou que « f est la dérivée de F ».

★ Théorème | Existence et unicité à une constante près

1. Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I .
2. Si F est une primitive de f sur I , alors **toutes** les primitives de f sur I sont de la forme :

$$F(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

3. Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration | De l'unicité à constante près — exigible

Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Or une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis). Donc $F(x) - G(x) = C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$, i.e. $G(x) = F(x) + C$.

Attention | L'intervalle est essentiel

La propriété « $F' = 0 \Rightarrow F$ constante » n'est vraie que sur un **intervalle**. Sur une réunion d'intervalles, la constante peut différer d'un intervalle à l'autre. Exemple : la fonction $F(x) = \begin{cases} \ln|x| + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ vérifie $F'(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas $\ln|x| + C$ avec une seule constante.

Propriété | Primitive avec condition initiale

Pour déterminer l'unique primitive F de f telle que $F(a) = b$:

1. Trouver une primitive générale : $G(x) + C$.
2. Déterminer C par $G(a) + C = b$, i.e. $C = b - G(a)$.

Exemple | Exemples fondamentaux

1. Trouver la primitive F de $f(x) = 2x$ telle que $F(1) = 5$.

Primitive générale : $x^2 + C$. $F(1) = 1 + C = 5$, donc $C = 4$. $F(x) = x^2 + 4$.

2. Trouver F primitive de $f(x) = e^x$ telle que $F(0) = 3$.

$$F(x) = e^x + C. F(0) = 1 + C = 3, C = 2. \boxed{F(x) = e^x + 2}.$$

3. Trouver F primitive de $f(x) = \cos x$ telle que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$F(x) = \sin x + C. F(\frac{\pi}{2}) = 1 + C = 0, C = -1. \boxed{F(x) = \sin x - 1}.$$

3.2 Tableau des primitives usuelles

✓ Propriété | Les primitives à connaître par cœur ♥

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Domaine
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{ax} \quad (a \neq 0)$	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

⚠ Attention | Pièges fréquents dans le tableau

- La primitive de $\sin x$ est $-\cos x$ (signe $-$!). Vérifie : $(-\cos x)' = \sin x$.
- La primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln |x|$ avec la **valeur absolue**. Si on sait que $x > 0$, on écrit $\ln x$.
- La formule $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ne marche **pas** pour $n = -1$ (sinon division par 0). Le cas $n = -1$ donne

$\ln |x|$.

— Pour e^{ax} , ne pas oublier de diviser par a : $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

✂ Méthode | Vérification systématique

Après avoir trouvé une primitive F , **vérifie toujours** en dérivant que $F' = f$. C'est le meilleur réflexe anti-erreur au bac.

3.3 Primitives des fonctions composées

C'est le cœur technique du chapitre. L'idée est de reconnaître dans l'expression à primitiver une forme $g'(u(x)) \cdot u'(x)$, qui est la dérivée de $g(u(x))$ par la règle de la chaîne.

✓ Propriété | Primitives composées — les 6 formes à connaître

Si u est dérivable sur I :

Fonction	Primitive	Condition
$u' \cdot u^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ si $n < 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u \neq 0$
$u' e^u$	e^u	—
$u' \cos u$	$\sin u$	—
$u' \sin u$	$-\cos u$	—
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$

✂ Méthode | Comment reconnaître et utiliser une primitive composée Q

1. **Identifie le cœur de la composée** : quel est $u(x)$? Cherche la fonction « intérieure ». Si tu vois e^{x^2} , alors $u = x^2$. Si tu vois $\ln(x^2 + 1)$ derrière un quotient, alors $u = x^2 + 1$.
2. **Calcule $u'(x)$** : si $u = x^2$, alors $u' = 2x$.
3. **Vérifie que u' apparaît en facteur** (éventuellement à un coefficient multiplicatif près). Si oui, ajuste le coefficient.
4. **Si u' n'apparaît pas** : la méthode des primitives composées ne s'applique pas directement. Il faut essayer autre chose (IPP, changement de variable, astuce).

Règle d'or : quand tu vois $\frac{u'}{u}$, écris $\ln |u|$. Quand tu vois $u' e^u$, écris e^u .

💡 Exemple | Exemples détaillés de primitives composées

1. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$. On pose $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$. C'est la forme $\frac{u'}{u}$. Réponse : $\ln(x^2 + 1) + C$. (Pas de $|\cdot|$ car $x^2 + 1 > 0$.)
2. $\int (2x+3)^4 dx$. Ici $u = 2x+3$, $u' = 2$. On a u^4 mais il manque le facteur $u' = 2$ devant. On écrit : $\int \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^5}{5} + C = \frac{(2x+3)^5}{10} + C$.
3. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$. $u = e^x + 1$, $u' = e^x$. Forme $\frac{u'}{u}$. Réponse : $\ln(e^x + 1) + C$.
4. $\int \sin(3x+2) dx$. $u = 3x+2$, $u' = 3$. On ajuste : $\frac{1}{3} \int 3 \sin u dx = \frac{1}{3}(-\cos u) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x+2) + C$.
5. $\int x e^{x^2} dx$. $u = x^2$, $u' = 2x$. On ajuste : $\frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$. $u = x^2 + 4$, $u' = 2x$. $\frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{u}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$.
7. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$. ($u = \cos x$, $u' = -\sin x$.)

3.4 L'intégrale définie

📖 Définition | Intégrale définie

Soit f continue sur $[a, b]$ et F une primitive quelconque de f . L'**intégrale de f de a à b** est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ce nombre ne dépend **pas** du choix de la primitive (la constante C se simplifie).

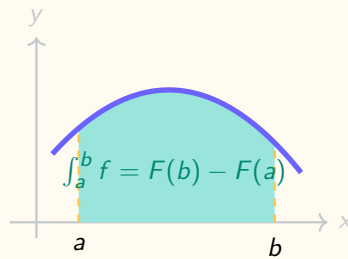
🖋 Démonstration | Indépendance du choix de primitive

Si $G = F + C$ est une autre primitive : $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

⚠ Attention | La notation $[F(x)]_a^b$

$[F(x)]_a^b$ signifie $F(b) - F(a)$. C'est **borne du haut** — **borne du bas**. L'ordre est crucial : inverser les bornes change le signe.

Intuition | Interprétation graphique



Quand $f \geq 0$ sur $[a, b]$, l'intégrale donne l'**aire** du domaine entre la courbe, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = b$.

Exemple | Calculs de référence — à connaître

- $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$
- $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$
- $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$
- $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$
- $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1.$
- $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1.$ (Primitive composée : $u = x^2$, $u' = 2x$.)
- $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = [\ln(x^2+x)]_1^2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$ ($u = x^2 + x$, $u' = 2x + 1$.)

3.5 Propriétés de l'intégrale

✓ Propriété | Propriétés fondamentales

Soient f, g continues sur un intervalle contenant a, b, c et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Linéarité** : $\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- Relation de Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (pour tout b , même hors de $[a, c]$)
- Bornes inversées** : $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Bornes égales** : $\int_a^a f = 0$
- Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0$
- Croissance** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

 Démonstration / De la linéarité

Si F est primitive de f et G de g , alors $\lambda F + G$ est primitive de $\lambda f + g$. Donc $\int_a^b (\lambda f + g) = [\lambda F + G]_a^b = \lambda(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.

 Démonstration / De Chasles

$$\int_a^b f + \int_b^c f = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a) = \int_a^c f.$$

 Démonstration / De la positivité

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors F (primitive de f) est croissante sur $[a, b]$ (car $F' = f \geq 0$). Donc $F(b) \geq F(a)$, i.e. $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$.

 Exemple | Illustration de Chasles

$$\int_0^3 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 x^2 dx. \text{ Vérification : } 9 = \frac{1}{3} + \frac{26}{3} = 9.$$

 Propriété | Inégalité de la moyenne

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$ avec $a < b$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

 Démonstration

En intégrant $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$: $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M dx$, soit $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

 Propriété | Inégalité triangulaire intégrale

Pour $a \leq b$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

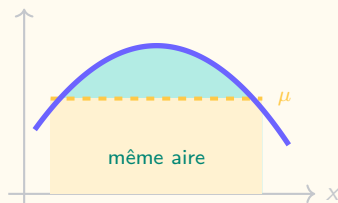
3.6 Valeur moyenne d'une fonction **Définition** | Valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f continue sur $[a, b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Intuition | Interprétation géométrique

μ est la hauteur du rectangle de base $[a, b]$ ayant la **même aire** que le domaine sous la courbe. C'est la « valeur constante équivalente » de f sur l'intervalle.



Exemple

1. Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0, 3]$: $\mu = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$.
2. Valeur moyenne de $\sin x$ sur $[0, \pi]$: $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$.
3. Valeur moyenne de e^x sur $[0, 1]$: $\mu = \frac{1}{1} \int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,718$.

3.7 Calcul d'aires

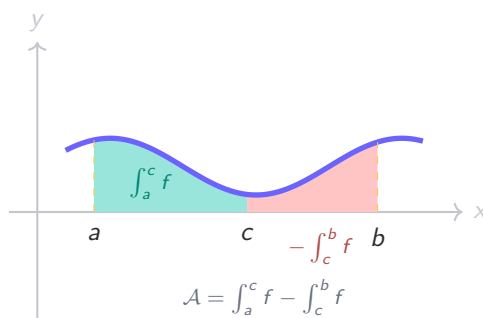
Méthode | Aire entre une courbe et l'axe Ox

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$$

En pratique :

1. Étudier le signe de f sur $[a, b]$.
2. Découper $[a, b]$ en sous-intervalles où f garde un signe constant.
3. Intégrer f (si $f \geq 0$) ou $-f$ (si $f \leq 0$) sur chaque sous-intervalle.
4. Additionner les aires partielles.



Méthode | Aire entre deux courbes

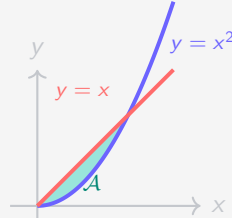
L'aire entre $y = f(x)$ et $y = g(x)$ pour $x \in [a, b]$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur tout $[a, b]$: $\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

💡 Exemple | Aire entre $y = x^2$ et $y = x$ — exemple complet

1. Intersection : $x^2 = x \iff x(x-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$.
2. Signe de $x - x^2 = x(1-x)$: positif sur $[0, 1]$ (donc $x \geq x^2$).
3. Calcul :



$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3.8 Intégration par parties (IPP)

★ Théorème | Intégration par parties

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

En notation condensée : $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Démonstration | Exigible au bac

$(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant de a à b : $\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. Le membre de gauche vaut $[uv]_a^b$ (théorème fondamental). D'où : $[uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$, ce qui donne $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

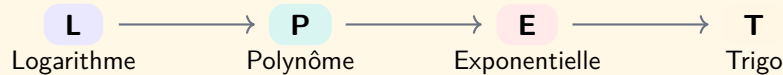
🧠 Intuition | L'idée de l'IPP

L'IPP « transfère la dérivation » d'un facteur à l'autre. Si on ne sait pas primitiver $u \cdot v'$, on essaie de primitiver $u' \cdot v$ à la place. L'IPP est utile quand la nouvelle intégrale est **plus simple** que l'originale.

🔧 Méthode | Comment choisir u et v' — règle LPET ↓

On choisit u parmi les fonctions les plus faciles à **dériver** (pour que u' simplifie l'intégrale), et v' parmi les fonctions les plus faciles à **primitiver**.

Règle mnémotechnique **LPET** — « elle pète ! » (priorité pour le choix de u) :



Lire de gauche à droite : les fonctions à gauche sont **toujours choisies comme u** (on les dérive). Les fonctions à droite sont **choisies comme v'** (on les primitive). Concrètement : $\ln$ est toujours u (car sa dérivée $\frac{1}{x}$ simplifie). Un polynôme est u face à une exponentielle ou un trigo. L'exponentielle ou la trigo est v' .

💡 Exemple | Les 4 IPP fondamentales du bac

$$1. I = \int_0^1 x e^x dx. \quad u = x \text{ (P)}, v' = e^x \text{ (E)}. u' = 1, v = e^x.$$

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = \boxed{1}.$$

$$2. J = \int_1^e \ln x dx. \quad u = \ln x \text{ (L)}, v' = 1 \text{ (P)}. u' = \frac{1}{x}, v = x.$$

$$J = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx = e \cdot 1 - 0 - [x]_1^e = e - (e - 1) = \boxed{1}.$$

$$3. K = \int_0^\pi x \sin x dx. \quad u = x \text{ (P)}, v' = \sin x \text{ (T)}. u' = 1, v = -\cos x.$$

$$K = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi \cdot 1 + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \boxed{\pi}.$$

$$4. L = \int_0^1 (2x + 1) e^{-x} dx. \quad u = 2x + 1, v' = e^{-x}. u' = 2, v = -e^{-x}.$$

$$L = [-(2x + 1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx = -3e^{-1} + 1 + [-2e^{-x}]_0^1 = -3e^{-1} + 1 - 2e^{-1} + 2 = \boxed{3 - 5e^{-1}}.$$

✂ Méthode | Double IPP

Parfois une seule IPP ne suffit pas. On en fait **deux** consécutives. C'est typique des intégrales $\int x^2 e^x$, $\int x^2 \sin x$, etc.

Exemple : $\int_0^1 x^2 e^x dx$. 1^{re} IPP ($u = x^2, v' = e^x$) : on obtient $e - 2 \int_0^1 x e^x dx$. 2^e IPP : $\int_0^1 x e^x dx = 1$ (déjà calculé). Donc $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$.

3.9 Le théorème fondamental de l'analyse

☰ Définition | Fonction intégrale

Soit f continue sur I et $a \in I$. La **fonction intégrale** de f à partir de a est :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

La variable t est une variable « muette » (d'intégration) ; le résultat est une fonction de x .

★ Théorème | Théorème fondamental de l'analyse (TFA)

Si f est continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'**unique primitive** de f qui s'annule en a :

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(a) = 0}$$

 Démonstration | Complète — exigible

$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ (bornes égales).

Pour la dérivée, calculons le taux d'accroissement pour $h > 0$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Par l'inégalité de la moyenne, si $m_h = \min_{[x, x+h]} f$ et $M_h = \max_{[x, x+h]} f$:

$$m_h \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M_h$$

Par continuité de f en x : $m_h \rightarrow f(x)$ et $M_h \rightarrow f(x)$ quand $h \rightarrow 0^+$. Par le théorème des gendarmes : $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow f(x)$. Le cas $h < 0$ est analogue. Donc $F'(x) = f(x)$.

 Intuition | Pourquoi le TFA est fondamental

Ce théorème établit le lien entre deux idées *a priori* différentes :

- L'**intégrale** (calculer des aires, sommer des quantités infinitésimales).
- La **dérivée** (calculer des taux de variation).

Le TFA dit que ces deux opérations sont **inverses l'une de l'autre**. C'est ce qui permet de calculer des intégrales en trouvant des primitives, au lieu de sommer des rectangles.

 Exemple | Fonctions définies par une intégrale

1. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. On ne sait pas exprimer F avec des fonctions élémentaires (pas de primitive « en formule fermée »). Mais grâce au TFA : $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ (donc F croissante), $F(0) = 0$, $F''(x) = -2xe^{-x^2}$ (point d'inflexion en 0). On peut étudier F sans la calculer !
2. $G(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$. $G'(x) = \frac{\ln x}{x}$. Signe de G' : positif pour $x > 1$, négatif pour $0 < x < 1$. Donc G décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Minimum en $x = 1$: $G(1) = 0$.

3.10 Sommes de Riemann

 Propriété | Convergence des sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Cas particulier très fréquent au bac, avec $[a, b] = [0, 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

✂ Méthode | Comment reconnaître une somme de Riemann

Tu vois une somme $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(k, n)$ où g dépend de $\frac{k}{n}$? C'est probablement une somme de Riemann. Factorise pour faire apparaître $\frac{1}{n} \sum f(\frac{k}{n})$, puis identifie f et calcule $\int_0^1 f$.

💡 Exemple

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n})^2$. C'est la somme de Riemann de $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. Limite : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.
2. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$. C'est $\approx$ la somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$. Limite : $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$.
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n}$. Même limite : $\ln 2$.
4. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$. Somme de Riemann de e^x sur $[0, 1]$. Limite : $e - 1$.

3.11 Inégalités intégrales et encadrements

✂ Méthode | Encadrer une intégrale

Pour encadrer $\int_a^b f(x) dx$:

1. Trouver m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$.
2. Appliquer l'inégalité de la moyenne : $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Pour un encadrement plus fin, on peut encadrer f par deux fonctions intégrables $g \leq f \leq h$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

💡 Exemple | Encadrements détaillés

1. Encadrons $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Pour $x \in [0, 1]$: $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. D'où $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$. (Valeur exacte : $I = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.)
2. Montrons $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$. Sur $[0, 1]$: $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 = e^0 \leq e^{x^2} \leq e^1 = e$. En intégrant : $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.
3. Encadrement fin avec $\sin x \leq x$: $\int_0^1 \sin x dx \leq \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Vérification : $\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1 \approx 0,46$.

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les 10 réflexes essentiels

1. **Vérifier en dérivant** : après avoir trouvé F , dérive-la pour vérifier que $F' = f$. C'est le réflexe numéro un.
2. **Repérer $\frac{u'}{u}$** : c'est $\ln |u|$. Le motif le plus fréquent au bac.
3. **Repérer $u'e^u$** : c'est e^u . Deuxième motif le plus fréquent.
4. **Repérer $u'u^n$** : c'est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.
5. **Linéariser** $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ avant d'intégrer ($\frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\frac{1-\cos 2x}{2}$).
6. **IPP** : pour $\int x^n e^x$, $\int x^n \sin x$, $\int x^n \cos x$, $\int \ln x$, $\int x \ln x$. Règle LPET.
7. **Aire = intégrale de $|f|$** : ne pas oublier la valeur absolue pour les aires géométriques.
8. **Aire entre deux courbes** : $\int |f - g|$, étudier le signe de $f - g$.
9. **Ne pas oublier le $+C$** dans les primitives (sauf dans une intégrale définie où C se simplifie).
10. **Fonction intégrale $\rightarrow$ TFA** : si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

Méthode | Mots-clés à repérer dans les énoncés du bac

Tu lis dans l'énoncé...	Tu penses à...
« trouver une primitive de f »	tableau des primitives, vérifier en dérivant
« calculer $\int_a^b f(x) dx$ »	$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
« calculer l'aire sous la courbe »	$\int_a^b f(x) dx$, étudier le signe de f
« calculer l'aire entre les courbes »	$\int_a^b f(x) - g(x) dx$
« valeur moyenne de f »	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$
« F définie par $\int_a^x f(t) dt$ »	TFA : $F' = f$, $F(a) = 0$, étudier F via f
« $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ »	somme de Riemann $\rightarrow \int_0^1 f$
« encadrer l'intégrale »	encadrer f puis intégrer
« F est la primitive de f telle que... »	déterminer C par la condition initiale
« en déduire une primitive de... »	IPP ou transformation

Attention | Top 6 des erreurs au bac

1. **Oublier le $+C$** . La primitive de $2x$ est $x^2 + C$, pas x^2 . Erreur bête mais fréquente.
2. **Confondre primitive de sin et de cos**. Retiens : primitive de $\sin x$ est $-\cos x$ (signe $-$), primitive de $\cos x$ est $\sin x$ (pas de $-$).
3. **Calculer l'aire comme $\int_a^b f$ sans valeur absolue**. Si f change de signe, l'intégrale n'est

PAS l'aire. L'aire est $\int |f|$.

4. **Oublier le coefficient dans les primitives composées.** $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, pas $e^{3x} + C$.
5. **Se tromper dans l'IPP.** Le crochet $[uv]_a^b$ est un **nombre**, pas une fonction. Vérifie que tu calcules bien $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
6. **Confondre** $\int_a^b f$ et $\int_b^a f$. Inverser les bornes change le signe !

✂ Méthode | Récapitulatif complet des formules

Résultat	Formule
Intégrale définie	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
Linéarité	$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
Chasles	$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
Bornes inversées	$\int_a^b f = - \int_b^a f$
Positivité	$f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0 \quad (a \leq b)$
Inég. de la moyenne	$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$
Valeur moyenne	$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$
Aire (une courbe)	$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$
Aire (deux courbes)	$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
IPP	$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$
TFA	$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$
Riemann	$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f$

5 Exercices

Exercice 1 — Primitives directes

Déterminer une primitive de chaque fonction sur son domaine :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$

d) $f(x) = 4e^x - \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

e) $f(x) = \cos x - 3 \sin x$

f) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

g) $f(x) = 5e^{-2x}$

h) $f(x) = x^{3/2}$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 2 — Intégrales directes

Calculer :

a) $\int_0^2 (3x^2 + 1) dx$ b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int_0^1 e^{-x} dx$

d) $\int_0^{\pi/3} \sin x dx$ e) $\int_1^e \frac{3}{x} dx$ f) $\int_0^1 (x+1)^3 dx$

Exercice 3 — Primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de f vérifiant la condition :

a) $f(x) = 4x^3$, $F(1) = 2$.

b) $f(x) = \cos x$, $F(\frac{\pi}{2}) = 3$.

c) $f(x) = e^{2x}$, $F(0) = 1$.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, $F(1) = 0$.

Exercice 4 — Primitives composées

Déterminer une primitive. Préciser u et u' à chaque fois.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$

b) $f(x) = (3x-1)^5$

c) $f(x) = xe^{x^2}$

d) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

h) $f(x) = x^2 e^{x^3}$

Exercice 5 — Valeur moyenne

a) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0, 3]$.

b) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \sin x$ sur $[0, \pi]$.

c) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = e^x$ sur $[0, \ln 2]$.

d) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 6 ★★☆☆ — Calcul d'aires

- a) Aire entre $y = x^2$ et l'axe Ox pour $x \in [0, 2]$.
- b) Aire entre $y = \sin x$ et l'axe Ox pour $x \in [0, 2\pi]$.
- c) Aire entre $y = x^2$ et $y = 2x$ pour $x \in [0, 2]$.
- d) Aire entre $y = e^x$ et $y = 1$ pour $x \in [0, 1]$.
- e) Aire entre $y = x^3 - x$ et l'axe Ox pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 7 ★★☆☆ — Intégration par parties

Calculer à l'aide d'une IPP :

- a) $\int_0^1 x e^x dx$
- b) $\int_1^e \ln x dx$
- c) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$
- d) $\int_0^1 (2x + 1) e^{-x} dx$
- e) $\int_1^e x \ln x dx$

Exercice 8 ★★☆☆ — Double IPP

Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$ en effectuant **deux** IPP successives.

Exercice 9 ★★☆☆ — Fonction intégrale et TFA

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- a) Calculer $F'(x)$ et $F(0)$.
- b) Montrer que F est strictement croissante.
- c) Montrer que F est impaire.
- d) Calculer $F(1)$ sachant que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- e) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 ★★☆☆ — Sommes de Riemann

Reconnaître une somme de Riemann et calculer la limite :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$

Exercice 11 ★★☆☆ — **Encadrement d'intégrales**

- a) Encadrer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$.
- b) Montrer que $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.
- c) Montrer que $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{192} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Exercice 12 ★★☆☆ — **Linéarisation et intégration trigo**

Calculer en linéarisant :

- a) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$
- b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$
- c) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$
- d) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$ (Indication : $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$.)

Exercice 13 ★★★ — **Démonstrations de cours**

- a) Démontrer le théorème d'intégration par parties.
- b) Démontrer le théorème fondamental de l'analyse.
- c) Démontrer que si f est continue et positive sur $[a, b]$ avec $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

Exercice 14 ★★★ — **Les intégrales de Wallis**

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Calculer I_0 et I_1 .
- b) Par IPP, montrer la relation de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- c) Calculer I_2, I_3, I_4, I_5 .
- d) Montrer que (I_n) est décroissante et positive, donc convergente.
- e) Montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \rightarrow 1$ et en déduire la **formule de Wallis** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$.

6 🐼 Problème — Inégalités intégrales et approximation de π ★★

🔥 Problème style prépa

Ce problème utilise l'intégration pour obtenir des encadrements de plus en plus fins de π , en passant par arctan et les sommes de Riemann, puis par la célèbre formule de Machin.

On rappelle que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ et que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Partie A — L'intégrale fondamentale et la formule de Leibniz

- Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule de la somme géométrique avec la raison $q = -x^2$, montrer que :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

- En intégrant sur $[0, 1]$, montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_n \quad \text{où } R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

- Montrer que $0 \leq |R_n| \leq \frac{1}{2^{n+3}}$, et en déduire la **formule de Leibniz** :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- Combien de termes faut-il pour obtenir π à 10^{-2} près ? À 10^{-6} près ?

Partie B — Sommes de Riemann et encadrement de π

- En utilisant les sommes de Riemann de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$, montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

- f est décroissante sur $[0, 1]$. En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2}$$

- Calculer numériquement pour $n = 4$ et vérifier la cohérence.

Partie C — Formule de Machin : calculer π efficacement

- Montrer que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Indication : calculer $\tan(\alpha + \beta)$ avec $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$, $\beta = \arctan \frac{1}{3}$.

- (Bonus — Formule de Machin, 1706) Montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Indication : poser $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$, calculer $\tan 2\alpha$, $\tan 4\alpha$, puis $\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4})$.

- Expliquer pourquoi la formule de Machin converge beaucoup plus vite que la formule de Leibniz. Combien de termes de la série de $\arctan \frac{1}{5}$ faut-il pour 10 décimales de π ?

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

- a) $F(x) = x^3 - x^2 + 5x$. Vérif : $F' = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$.
- b) $f(x) = x^{-3}$. $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$. Vérif : $F' = \frac{1}{x^3}$.
- c) $f(x) = x^{1/2}$. $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Vérif : $F' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$.
- d) $F(x) = 4e^x - \ln x$ (sur $]0, +\infty[$).
- e) $F(x) = \sin x + 3 \cos x$. Vérif : $F' = \cos x - 3 \sin x = f(x)$.
- f) $F(x) = 2 \tan x$. Vérif : $F' = \frac{2}{\cos^2 x} = f(x)$.
- g) $F(x) = 5 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{5}{2}e^{-2x}$. Vérif : $F' = -\frac{5}{2} \cdot (-2)e^{-2x} = 5e^{-2x}$.
- h) $f(x) = x^{3/2}$. $F(x) = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5}x^{5/2}$.

Exercice 2

- a) $\int_0^2 (3x^2 + 1) dx = [x^3 + x]_0^2 = (8 + 2) - 0 = 10$.
- b) $\int_1^4 x^{-1/2} dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$.
- c) $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$.
- d) $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/3} = -\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.
- e) $\int_1^e \frac{3}{x} dx = [3 \ln x]_1^e = 3 \ln e - 3 \ln 1 = 3$.
- f) $\int_0^1 (x+1)^3 dx = [\frac{(x+1)^4}{4}]_0^1 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

Exercice 3

- a) $F(x) = x^4 + C$. $F(1) = 1 + C = 2$, $C = 1$. $F(x) = x^4 + 1$.
- b) $F(x) = \sin x + C$. $F(\frac{\pi}{2}) = 1 + C = 3$, $C = 2$. $F(x) = \sin x + 2$.
- c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. $F(0) = \frac{1}{2} + C = 1$, $C = \frac{1}{2}$. $F(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$.
- d) $F(x) = \ln x + C$. $F(1) = 0 + C = 0$, $C = 0$. $F(x) = \ln x$.

Exercice 4

- a) $u = x^2 + x + 3$, $u' = 2x + 1$. Forme $\frac{u'}{u}$. Primitive : $\ln(x^2 + x + 3) + C$.
- b) $u = 3x - 1$, $u' = 3$. On a u^5 avec le facteur 1 au lieu de $u' = 3$. On ajuste : $\frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^6}{6} = \frac{(3x-1)^6}{18} + C$.
- c) $u = x^2$, $u' = 2x$. On a $xe^u = \frac{1}{2}u'e^u$. Primitive : $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$.
- d) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. $u = \cos x$, $u' = -\sin x$. $\tan x = -\frac{u'}{u}$. Primitive : $-\ln |\cos x| + C$.
- e) $u = e^x + 2$, $u' = e^x$. Forme $\frac{u'}{u}$. Primitive : $\ln(e^x + 2) + C$.
- f) $u = 1 + x^2$, $u' = 2x$. $\frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Primitive : $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} = \sqrt{1 + x^2} + C$.
- g) $u = 1 + \sin x$, $u' = \cos x$. Forme $\frac{u'}{u}$. Primitive : $\ln(1 + \sin x) + C$.

h) $u = x^3$, $u' = 3x^2$. $x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} u' e^u$. Primitive : $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

Exercice 5

a) $\mu = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$.

b) $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (1 + 1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$.

c) $\mu = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{\ln 2} e^x dx = \frac{1}{\ln 2} [e^x]_0^{\ln 2} = \frac{2-1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443$.

d) $\mu = \frac{1}{1} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 \approx 0,693$.

Exercice 6

a) $x^2 \geq 0$ sur $[0, 2]$, donc $\mathcal{A} = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

b) $\sin x \geq 0$ sur $[0, \pi]$, $\sin x \leq 0$ sur $[\pi, 2\pi]$.

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x) dx = [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi} = (1 + 1) + (1 + 1) = 4.$$

c) $x^2 = 2x \iff x = 0$ ou 2 . Sur $[0, 2]$: $2x - x^2 = x(2 - x) \geq 0$, donc $2x \geq x^2$.

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

d) $e^x \geq 1$ sur $[0, 1]$, donc $\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = (e - 1) - 1 = e - 2$.

e) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$. Signe : positif sur $[-1, 0]$, négatif sur $[0, 1]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7

a) $u = x$, $v' = e^x$. $u' = 1$, $v = e^x$. $[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$.

b) $u = \ln x$, $v' = 1$. $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$. $[x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1$.

c) $u = x$, $v' = \cos x$. $u' = 1$, $v = \sin x$. $[x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$.

d) $u = 2x + 1$, $v' = e^{-x}$. $u' = 2$, $v = -e^{-x}$.

$$[-(2x + 1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx = -3e^{-1} + 1 + [-2e^{-x}]_0^1 = -3e^{-1} + 1 - 2e^{-1} + 2 = 3 - \frac{5}{e}.$$

e) $u = \ln x$, $v' = x$. $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Exercice 8

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

1^{re} IPP : $u = x^2$, $v' = e^x$, $u' = 2x$, $v = e^x$.

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

2^e IPP : (Ex. 7a) $\int_0^1 x e^x dx = 1$.

$$I = e - 2 \times 1 = e - 2.$$

Exercice 9

a) Par le TFA : $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$.

b) $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: F est **strictement croissante**.

c) $F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt$. Changement de variable $t = -s$, $dt = -ds$. Quand $t = 0$: $s = 0$; quand $t = -x$: $s = x$.

$$F(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+s^2} (-ds) = -\int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = -F(x).$$

Donc F est **impaire**.

d) $F(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

e) Pour $x > 0$: $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0, 1]$. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$ est une somme de Riemann (borne droite). Limite : $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

b) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n}$: somme de Riemann de $\frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$. Limite : $\ln 2$.

c) $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$: somme de Riemann de e^x sur $[0, 1]$. Limite : $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

d) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$: somme de Riemann de $\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. Limite : $\int_0^1 \sqrt{x} dx = [\frac{2}{3} x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Exercice 11

a) Pour $x \in [0, 1]$: $0 \leq x^3 \leq 1$, donc $1 \leq 1+x^3 \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$.

En intégrant : $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1$.

b) Sur $[0, 1]$: $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $e^0 \leq e^{x^2} \leq e^1$. En intégrant : $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

c) Pour $x > 0$: $\sin x \leq x$ (exercice classique), donc $\frac{\sin x}{x} \leq 1$. De plus $\frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{6}$ (développement de Taylor). En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{4}]$:

$$\int_0^{\pi/4} (1 - \frac{x^2}{6}) dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

$[x - \frac{x^3}{18}]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{18 \cdot 64} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{1152}$. Or $\frac{\pi^3}{1152} \leq \frac{\pi^3}{192 \cdot 6}$ et $\frac{\pi^3}{1152} < \frac{\pi^3}{192}$ (en simplifiant). L'encadrement demandé en découle.

Exercice 12

a) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. $\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2} dx = [\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

b) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = [\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

c) $\sin^2 x \cos^2 x = (\frac{\sin 2x}{2})^2 = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 4x}{8}$.

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos 4x}{8} dx = \frac{1}{8} [x - \frac{\sin 4x}{4}]_0^\pi = \frac{\pi}{8}.$$

d) $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 = \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8} dx = \frac{1}{8} [3x + 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$$

Exercice 13

a) $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant : $\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. Or $\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$. D'où $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

b) Déjà démontré en détail dans la section 3.8. Idée : $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$, encadré par m_h et $M_h \rightarrow f(x)$ par continuité.

c) Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a, b]$. Notons $[\alpha, \beta]$ ce sous-intervalle (de longueur > 0). Alors $\int_a^b f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0$. Contradiction avec $\int_a^b f = 0$.

Exercice 14

a) $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

b) Écrivons $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx$. IPP : $u = \cos^{n-1} x$, $v' = \cos x$, donc $u' = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x$, $v = \sin x$.

$$I_n = [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx.$$

Le crochet vaut 0 (vérifier aux deux bornes). On remplace $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

$$I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}, \text{ soit } nI_n = (n-1)I_{n-2}. \text{ D'où } \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}.$$

$$\text{c) } I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}. \quad I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}. \quad I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}. \quad I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}.$$

d) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $0 \leq \cos x \leq 1$, donc $\cos^{n+1} x \leq \cos^n x$. En intégrant : $I_{n+1} \leq I_n$. De plus $I_n > 0$ (intégrale d'une fonction positive non nulle). Donc (I_n) décroissante positive, elle converge.

e) De $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ et $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$: $\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$, d'où $\frac{I_n}{I_{n-1}} \rightarrow 1$. En calculant $I_{2n} \cdot I_{2n+1}$ par la récurrence : $I_{2n} \cdot I_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$. Comme $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \rightarrow 1$: $I_{2n+1}^2 \sim \frac{\pi}{2(2n+1)} \sim \frac{\pi}{4n}$. Le produit $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} \cdot \frac{2}{\pi} \rightarrow 1$ donne la formule de Wallis.

Corrigé du problème**Partie A — L'intégrale fondamentale et la formule de Leibniz**

$$1. \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

2. La somme géométrique de premier terme 1 et de raison $q = -x^2$ donne :

$$\sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

On isole $\frac{1}{1+x^2}$: multiplions les deux côtés par $\frac{1+x^2}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Non, plus directement : de l'égalité $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$, on tire :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

ce qui est bien le résultat demandé (vérifier en multipliant par $1 + x^2$).

3. En intégrant terme à terme sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^1 x^{2k} dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}. \text{ Donc } \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_n \text{ avec } R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

$$4. |R_n| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx. \text{ Sur } [0, 1] : \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2} \text{ (car } 1+x^2 \geq 1). \text{ D'où } |R_n| \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0.$$

$$\text{Conclusion : } \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

5. Précision 10^{-2} : $\frac{1}{2n+3} \leq 10^{-2} \iff 2n+3 \geq 100 \iff n \geq 49$. Il faut ~ 50 termes. Précision 10^{-6} : $n \geq 499\,999$, soit $\sim 500\,000$ termes ! La convergence est très lente.

Partie B — Sommes de Riemann et encadrement de π

6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Par le théorème des sommes de Riemann :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

7. $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$ sur $]0, 1]$: f est décroissante. Sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$:

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ En intégrant puis en sommant :}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$8. n = 4 : S_4^+ = \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})) = \frac{1}{4}(1 + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}) = \frac{1}{4}(1 + 0,941 + 0,8 + 0,64) \approx 0,845.$$

$$S_4^- = \frac{1}{4}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)) = \frac{1}{4}(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2}) \approx 0,720.$$

$$\text{Donc } 0,720 \leq \frac{\pi}{4} \leq 0,845, \text{ soit } 2,88 \leq \pi \leq 3,38. \text{ Cohérent avec } \pi \approx 3,14.$$

Partie C — Formule de Machin

$$9. \alpha = \arctan \frac{1}{2}, \beta = \arctan \frac{1}{3}. \tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{1}{3}.$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1.$$

$$\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{4}[\text{ donc } \alpha + \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[. \text{ Or } \tan(\alpha + \beta) = 1 \text{ et } \alpha + \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[: \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$10. (\text{Bonus}) \text{ Posons } \alpha = \arctan \frac{1}{5}. \tan \alpha = \frac{1}{5}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{10/12}{119/144} = \frac{10 \cdot 144}{12 \cdot 119} = \frac{120}{119}.$$

$$\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1 + \tan 4\alpha} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1/119}{239/119} = \frac{1}{239}.$$

$$\text{Donc } 4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239} \text{ (car } 4\alpha \text{ est proche de } \frac{\pi}{4} \text{ et la différence est petite et positive). D'où } \frac{\pi}{4} = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

$$11. \arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + O(x^{2n+3}) \text{ pour } |x| \leq 1. \text{ Pour } x = \frac{1}{5}, \text{ les termes décroissent comme } \frac{1}{5^{2k+1}}, \text{ soit un facteur } \frac{1}{25} \text{ à chaque étape. Pour 10 décimales : } \frac{1}{5^{2n+1}} \leq 10^{-10}, \text{ soit } 5^{2n+1} \geq 10^{10}, \text{ ce qui}$$

donne $n \approx 7$. Seulement ~ 8 termes suffisent ! Pour $\arctan \frac{1}{239}$, la convergence est encore plus rapide (1 ou 2 termes suffisent).

La formule de Leibniz nécessiterait $\sim 5 \times 10^9$ termes pour la même précision. La formule de Machin est donc environ un **milliard de fois** plus efficace.

Fin de la Fiche 13 — Primitives & Intégration

Tu maîtrises maintenant les primitives (directes et composées), l'intégrale définie et ses propriétés, le théorème fondamental de l'analyse, le calcul d'aires (entre courbes), l'intégration par parties (simple et double), la valeur moyenne, les sommes de Riemann, les encadrements d'intégrales et la linéarisation pour l'intégration trigonométrique.

L'intégration est l'outil central de l'analyse, indispensable en physique, en probabilités et dans toutes les sciences quantitatives.

→ Prochaine fiche : Équations différentielles.

« Intégrer, c'est retrouver le tout à partir du taux de variation. »