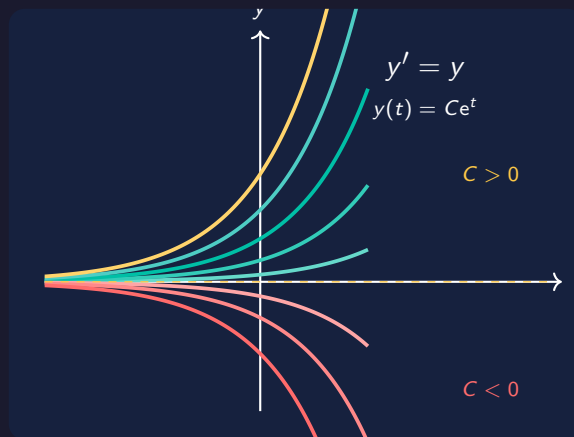


Équations différentielles

$y' = ay + b$ ■ Croissance / décroissance ■ Problème de Cauchy



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier les équations différentielles ?	3
1.1	De quoi parle-t-on ?	3
1.2	Les applications concrètes	3
1.3	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Chercher une fonction à partir de sa dérivée	4
2.2	Un faisceau de courbes	4
2.3	L'équation $y' = ay + b$: évolution vers un équilibre	4
3	🎓 Le cours formel	6
3.1	Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?	6
3.2	L'équation $y' = f$: lien avec les primitives	6
3.3	L'équation $y' = ay$ — croissance et décroissance exponentielles	7
3.4	Structure des solutions de $y' = ay$	7
3.5	Le problème de Cauchy : condition initiale	8
3.6	L'équation $y' = ay + b$ — évolution vers un équilibre	9
3.7	Principe de superposition : solution générale = homogène + particulière	10
3.8	Signe et variations des solutions	12
3.9	Vérifier qu'une fonction est solution, retrouver une ED	12
3.10	Temps caractéristiques	13
3.11	Le problème de Cauchy pour $y' = ay + b$	13
3.12	Mise sous forme canonique	14
3.13	Résumé graphique : allure des solutions	14
3.14	Tableau récapitulatif	14
4	🧰 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	✍ Exercices	18
6	🔑 Problème — <i>Modèle logistique et équation de Verhulst</i> ★★ ★	22
7	✔ Corrigés détaillés	23

1 ? Pourquoi étudier les équations différentielles ?

1.1 De quoi parle-t-on ?

Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une **fonction** $y(t)$ et où interviennent y et ses **dérivées** y' , y'' , etc. C'est l'outil mathématique fondamental pour modéliser tout phénomène qui évolue dans le temps.

En Terminale, on étudie l'équation du premier ordre la plus simple : $y' = ay + b$.

1.2 Les applications concrètes

 Radioactivité $N'(t) = -\lambda N$ décroissance exponentielle	 Population $P'(t) = kP$ croissance exponentielle	 Refroidissement $T' = -k(T - T_a)$ loi de Newton	 Pharmacologie $C' = -\lambda C + d$ concentration médicament
--	---	---	---

En physique nucléaire : un échantillon radioactif perd ses atomes à un taux proportionnel à la quantité présente : $N'(t) = -\lambda N(t)$. Solution : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ (décroissance exponentielle). Le carbone 14 utilise ce principe pour la datation.

En biologie : une population de bactéries se multiplie proportionnellement à sa taille : $P'(t) = kP(t)$. Solution : $P(t) = P_0 e^{kt}$ (croissance exponentielle). C'est le modèle de Malthus.

En thermodynamique : un objet chaud refroidit vers la température ambiante T_a avec $T'(t) = -k(T(t) - T_a)$. C'est la loi de refroidissement de Newton, une équation $y' = ay + b$.

En électricité : le circuit RC obéit à $u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{E}{RC}$, où u est la tension aux bornes du condensateur. C'est une équation $y' = ay + b$.

1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

Une équation différentielle traduit une **loi d'évolution** : elle relie la grandeur y à sa vitesse de variation y' . Résoudre l'équation, c'est trouver **toutes les fonctions** $y(t)$ qui satisfont cette loi. Le programme de Terminale se concentre sur $y' = ay$ (croissance/décroissance exponentielle) et $y' = ay + b$ (évolution vers un équilibre).

2 L'idée avant la formule

2.1 Chercher une fonction à partir de sa dérivée

Intuition | La question fondamentale

On te dit : « la vitesse de variation de y est proportionnelle à y elle-même ». Autrement dit : $y' = ky$. Quelle fonction a cette propriété ?

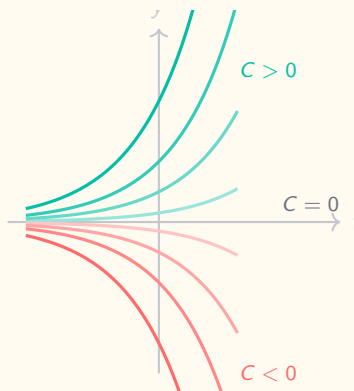
La réponse est l'**exponentielle**. En effet, si $y(t) = Ce^{kt}$ alors $y'(t) = kCe^{kt} = ky(t)$.

C'est la seule famille de fonctions qui satisfait cette relation : plus y est grand, plus y croît vite (ou décroît vite si $k < 0$). C'est le mécanisme de la croissance exponentielle.

2.2 Un faisceau de courbes

Intuition | Toute une famille de solutions

L'équation $y' = y$ a pour solutions $y(t) = Ce^t$ pour **tout** $C \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas une seule courbe, mais un **faisceau** de courbes :



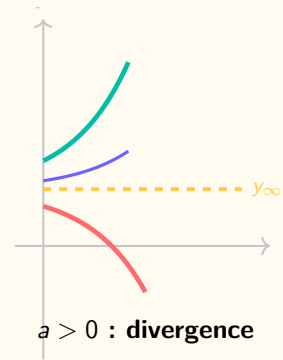
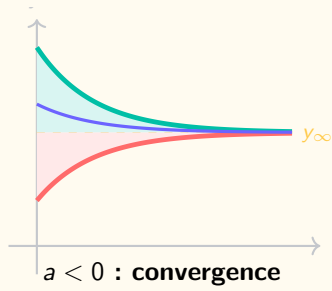
Pour sélectionner **une seule** solution dans ce faisceau, il faut une **condition initiale** : la valeur de y en un point donné, par exemple $y(0) = y_0$. C'est le **problème de Cauchy**.

2.3 L'équation $y' = ay + b$: évolution vers un équilibre

Intuition | L'équilibre

L'équation $y' = ay + b$ a un **état d'équilibre** : la valeur y_∞ telle que $y' = 0$, i.e. $ay_\infty + b = 0$, soit $y_\infty = -\frac{b}{a}$.

- Si $a < 0$: l'équilibre est **stable**. Toutes les solutions convergent vers $y_\infty = -\frac{b}{a}$ quand $t \rightarrow +\infty$. C'est le cas du refroidissement, du circuit RC, de la pharmacologie.
- Si $a > 0$: l'équilibre est **instable**. Les solutions s'éloignent de y_∞ . C'est le cas d'une population sans frein.



3 Le cours formel

3.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Définition | Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** y et qui fait intervenir y et une ou plusieurs de ses dérivées (y' , y'' , ...).

L'**ordre** de l'équation est l'ordre de dérivation le plus élevé qui y apparaît.

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver **toutes** les fonctions y définies et dérivables sur un intervalle I qui la vérifient.

Exemple | Exemples d'équations différentielles

Équation	Ordre	Contexte
$y' = 2y$	1	croissance exponentielle
$y' = -3y + 6$	1	évolution vers l'équilibre $y_\infty = 2$
$y'' = -\omega^2 y$	2	oscillateur harmonique (hors programme)

En Terminale, on étudie uniquement les équations du **premier ordre** à **coefficients constants** : $y' = ay + b$.

3.2 L'équation $y' = f$: lien avec les primitives

Propriété | L'ED la plus simple

L'équation $y' = f(t)$, où f est une fonction continue sur un intervalle I , est une équation différentielle d'ordre 1. **Résoudre** cette équation revient exactement à trouver les **primitives** de f sur I :

$$y' = f(t) \iff y(t) = F(t) + C \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ et } C \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier de $y' = ay + b$ avec $a = 0$, b remplacé par $f(t)$.

Exemple

$y' = 3t^2$. Les solutions sont $y(t) = t^3 + C$. Avec $y(0) = 5$: $C = 5$, $y(t) = t^3 + 5$.

$y' = \cos t$. Les solutions sont $y(t) = \sin t + C$.

$y' = e^t$. Les solutions sont $y(t) = e^t + C$.

Attention | Cas $a = 0$: pas d'exponentielles !

Quand $a = 0$ dans $y' = ay + b$, on obtient $y' = b$ (constante). La solution est $y(t) = bt + C$, une droite. On ne retrouve **pas** d'exponentielles. Les formules $y_\infty = -\frac{b}{a}$, $\tau = \frac{1}{|a|}$, etc., ne s'appliquent **pas** quand $a = 0$.

3.3 L'équation $y' = ay$ — croissance et décroissance exponentielles

★ Théorème | Résolution de $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$y(t) = Ce^{at} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

C'est la **solution générale**. C est une constante arbitraire.

Démonstration | Exigible au bac

Sens $\Leftarrow$: si $y(t) = Ce^{at}$, alors $y'(t) = Ca e^{at} = ay(t)$. Donc y est bien solution.

Sens $\Rightarrow$ (unicité) : supposons y solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$. Posons $z(t) = y(t)e^{-at}$. Alors :

$$z'(t) = y'(t)e^{-at} + y(t)(-a)e^{-at} = e^{-at}(y'(t) - ay(t)) = e^{-at} \cdot 0 = 0$$

car $y' = ay$. Donc z est constante : $z(t) = C$ pour tout t . D'où $y(t)e^{-at} = C$, i.e. $y(t) = Ce^{at}$.

⚠ Attention | L'astuce de la démo : multiplier par e^{-at}

La technique clé est de poser $z = ye^{-at}$ et montrer que $z' = 0$. C'est un **grand classique** des équations différentielles : on « neutralise » le facteur e^{at} pour obtenir une fonction constante. Cette méthode se généralise en prépa.

✓ Propriété | Cas particuliers importants

- $C = 0$: $y(t) = 0$ est toujours solution (la **solution triviale**).
- $a > 0$: les solutions non nulles sont des **exponentielles croissantes** ($C > 0$) ou décroissantes ($C < 0$), qui divergent quand $t \rightarrow +\infty$.
- $a < 0$: les solutions convergent toutes vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} Ce^{at} = 0$.

💡 Exemple | Exemples fondamentaux

1. $y' = 3y$: solutions $y(t) = Ce^{3t}$.
2. $y' = -2y$: solutions $y(t) = Ce^{-2t}$. Toutes convergent vers 0.
3. $y' = y$: solutions $y(t) = Ce^t$. Pour $C = 1$: $y = e^t$.
4. $y' = -\frac{y}{5}$: solutions $y(t) = Ce^{-t/5}$. Décroissance lente.

3.4 Structure des solutions de $y' = ay$

✓ Propriété | L'ensemble des solutions est une « droite vectorielle »

L'ensemble des solutions de $y' = ay$ est $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{at} \mid C \in \mathbb{R}\}$.
Cet ensemble a une structure très particulière :

- **La fonction nulle est solution** : $y = 0$ vérifie $y' = 0 = a \times 0 = ay$.

— **Stabilité par combinaison linéaire** : si y_1 et y_2 sont solutions de $y' = ay$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution.

On dit que $\mathcal{S}_H$ est un **sous-espace vectoriel** de dimension 1, engendré par $t \mapsto e^{at}$.

 *Démonstration | Stabilité par combinaison linéaire*

Si $y'_1 = ay_1$ et $y'_2 = ay_2$, posons $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors :

$$y' = \alpha y'_1 + \beta y'_2 = \alpha(ay_1) + \beta(ay_2) = a(\alpha y_1 + \beta y_2) = ay$$

Donc y est bien solution de $y' = ay$.

 **Attention | Attention : cette propriété ne marche que pour l'équation homogène**

Si y_1 et y_2 sont solutions de $y' = ay + b$ (avec $b \neq 0$), alors $y_1 + y_2$ n'est **pas** solution de $y' = ay + b$ en général. En revanche, $y_1 - y_2$ est solution de l'**équation homogène** $y' = ay$ (voir la section suivante).

 **Propriété | Signe des solutions : une solution de $y' = ay$ ne change jamais de signe**

Si y est solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$, alors y garde un **signe constant** : soit $y > 0$ partout, soit $y < 0$ partout, soit $y = 0$ partout.

En effet, $y(t) = Ce^{at}$ et $e^{at} > 0$ pour tout t . Donc le signe de $y(t)$ est celui de C .

 **Intuition | Interprétation géométrique**

Les courbes solutions de $y' = ay$ forment un **faisceau** : elles ne se croisent jamais (sauf en $\pm\infty$ si $a < 0$). C'est une conséquence de l'**unicité** du problème de Cauchy : deux courbes distinctes ne peuvent pas passer par le même point (t_0, y_0) .

3.5 Le problème de Cauchy : condition initiale

 **Définition | Problème de Cauchy**

Un **problème de Cauchy** est une équation différentielle accompagnée d'une **condition initiale** :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où t_0 et y_0 sont donnés.

★ Théorème | Existence et unicité

Le problème de Cauchy $y' = ay$, $y(t_0) = y_0$ admet une **unique** solution :

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$$

Démonstration

La solution générale est $y(t) = Ce^{at}$. La condition $y(t_0) = y_0$ donne $Ce^{at_0} = y_0$, soit $C = y_0 e^{-at_0}$.
Donc $y(t) = y_0 e^{-at_0} \cdot e^{at} = y_0 e^{a(t-t_0)}$.

✂ Méthode | Résoudre un problème de Cauchy en 3 étapes

1. **Écrire la solution générale** : $y(t) = Ce^{at}$.
2. **Déterminer** C avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$: $C = y_0 e^{-at_0}$.
3. **Conclure** : $y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$.

Cas fréquent $t_0 = 0$: $y(t) = y_0 e^{at}$ directement.

Exemple | Exemples de problèmes de Cauchy

1. $y' = 2y$, $y(0) = 5$. Solution générale : $y = Ce^{2t}$. $y(0) = C = 5$. $y(t) = 5e^{2t}$.
2. $y' = -3y$, $y(0) = 100$. $y(t) = 100e^{-3t}$.
3. $y' = y$, $y(1) = e$. $Ce^1 = e$, $C = 1$. $y(t) = e^t$.
4. $y' = -0,5y$, $y(2) = 8$. $Ce^{-1} = 8$, $C = 8e$. $y(t) = 8e \cdot e^{-0,5t} = 8e^{1-0,5t} = 8e^{-0,5(t-2)}$.

3.6 L'équation $y' = ay + b$ — évolution vers un équilibre

★ Théorème | Résolution de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : **solution générale** = **solution générale de l'équation homogène** $y' = ay$ + **solution particulière constante** $y_p = -\frac{b}{a}$.

Démonstration | Méthode 1 : changement de fonction

On pose $z(t) = y(t) + \frac{b}{a}$, i.e. $y(t) = z(t) - \frac{b}{a}$. Alors $y' = z'$ et :

$$y' = ay + b \iff z' = a\left(z - \frac{b}{a}\right) + b = az - b + b = az$$

Donc z est solution de $z' = az$, d'où $z(t) = Ce^{at}$. Finalement $y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

 Démonstration | Méthode 2 : solution particulière + homogène

On cherche d'abord une **solution particulière constante** y_p : $y_p' = 0 = ay_p + b$, d'où $y_p = -\frac{b}{a}$.
 Puis on pose $z = y - y_p$. Alors $z' = y' - y_p' = y' = (ay + b) = a(z + y_p) + b = az + ay_p + b = az + 0 = az$.
 Donc z est solution de $z' = az$: $z(t) = Ce^{at}$. $y(t) = z(t) + y_p = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

 Propriété | Solution d'équilibre et comportement asymptotique

- La valeur d'équilibre est $y_\infty = -\frac{b}{a}$ (la solution constante, où $y' = 0$).
- Si $a < 0$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{b}{a} = y_\infty$. Toutes les solutions **convergent** vers l'équilibre.
- Si $a > 0$: les solutions (sauf y_p) **divergent** quand $t \rightarrow +\infty$.
- On peut réécrire la solution : $y(t) = (y_0 - y_\infty)e^{at} + y_\infty$ où $y_0 = y(0)$ et $y_\infty = -\frac{b}{a}$.

 Attention | L'écriture $y = (y_0 - y_\infty)e^{at} + y_\infty$ est très utile

Cette forme met en évidence que la solution **part** de y_0 (quand $t = 0$) et **tend** vers y_∞ (quand $t \rightarrow +\infty$ si $a < 0$). L'écart $y - y_\infty = (y_0 - y_\infty)e^{at}$ décroît exponentiellement.

 Exemple | Exemples détaillés

- $y' = -2y + 6$, $y(0) = 1$. Ici $a = -2$, $b = 6$, $y_\infty = -\frac{6}{-2} = 3$.
 Solution générale : $y(t) = Ce^{-2t} + 3$. Condition : $y(0) = C + 3 = 1$, $C = -2$.
 $y(t) = -2e^{-2t} + 3 = (1 - 3)e^{-2t} + 3$. Convergence vers 3.
- $y' = -y + 5$, $y(0) = 0$. $y_\infty = 5$. $y(t) = Ce^{-t} + 5$. $y(0) = C + 5 = 0$, $C = -5$.
 $y(t) = 5(1 - e^{-t})$. Part de 0, converge vers 5.
- $y' = 3y - 12$, $y(0) = 5$. $y_\infty = \frac{12}{3} = 4$. $y(t) = Ce^{3t} + 4$. $y(0) = C + 4 = 5$, $C = 1$.
 $y(t) = e^{3t} + 4$. Diverge ($a > 0$).
- Refroidissement : $T' = -0,1(T - 20) = -0,1T + 2$, $T(0) = 90$.
 $a = -0,1$, $b = 2$, $T_\infty = 20$. $T(t) = 70e^{-0,1t} + 20$. Convergence vers 20°C .

3.7 Principe de superposition : solution générale = homogène + particulière

 Théorème | Théorème fondamental de structure

Soit (E) l'équation $y' = ay + b$ et (E_H) l'équation homogène associée $y' = ay$.

- Différence de deux solutions** : si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) , alors $y_1 - y_2$ est solution de (E_H) .
- Solution générale** : si y_p est une **solution particulière** de (E) , alors l'ensemble de **toutes** les solutions de (E) est :

$$S = \{y_p + y_H \mid y_H \text{ solution de } (E_H)\} = \{y_p + Ce^{at} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Autrement dit : **solution générale de (E) = une solution particulière de (E) + solution générale**

de (E_H) .

 Démonstration

1. Si $y_1' = ay_1 + b$ et $y_2' = ay_2 + b$, alors $(y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = a(y_1 - y_2) + b - b = a(y_1 - y_2)$.
Donc $y_1 - y_2$ est solution de $y' = ay$.
2. Soit y solution de (E) . Posons $z = y - y_p$. Par le point 1, z est solution de (E_H) , donc $z(t) = Ce^{at}$ pour un certain C . Ainsi $y = y_p + Ce^{at}$.
Réciproquement, si $y = y_p + Ce^{at}$, alors $y' = y_p' + Ca e^{at} = (ay_p + b) + a(Ce^{at}) = a(y_p + Ce^{at}) + b = ay + b$.

 Attention | Ce principe est la clé de toute la théorie

Ce principe explique **pourquoi** on résout toujours en deux étapes :

1. **Résoudre l'homogène** $y' = ay \rightarrow y_H = Ce^{at}$.
2. **Trouver UNE solution particulière** y_p de $y' = ay + b \rightarrow$ ici $y_p = -\frac{b}{a}$ (constante).
3. **Conclusion** : $y = y_H + y_p = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

En prépa, ce même principe s'applique aux ED d'ordre 2 et avec des seconds membres plus compliqués.

 Propriété | Somme et multiples de solutions — attention !

- Si y_1, y_2 solutions de (E_H) : $y' = ay \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$ aussi solution de (E_H) . ✓
- Si y_1, y_2 solutions de (E) : $y' = ay + b \Rightarrow y_1 - y_2$ solution de (E_H) . ✓
- Si y_1, y_2 solutions de (E) : $y' = ay + b \Rightarrow y_1 + y_2$ n'est **pas** solution de (E) . ✗
- Si y solution de (E) et $\lambda \neq 1 \Rightarrow \lambda y$ n'est **pas** solution de (E) . ✗

Explication : $(\alpha y_1 + \beta y_2)' = a(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha + \beta)b$, ce qui n'est égal à $a(\alpha y_1 + \beta y_2) + b$ que si $\alpha + \beta = 1$.

 Exemple | Illustration

$y' = -y + 3$ admet $y_p = 3$ comme solution particulière et $y_1(t) = e^{-t} + 3$, $y_2(t) = 2e^{-t} + 3$ comme solutions.

$y_1 - y_2 = -e^{-t}$: c'est bien solution de $y' = -y$. ✓

$y_1 + y_2 = 3e^{-t} + 6$: vérifions $(y_1 + y_2)' = -3e^{-t}$ et $-(y_1 + y_2) + 3 = -3e^{-t} - 3 \neq -3e^{-t}$. ✗

3.8 Signe et variations des solutions

✓ Propriété | Signe des solutions de $y' = ay + b$

Si $a < 0$ et $y_\infty = -\frac{b}{a}$:

- Si $y_0 > y_\infty$: la solution $y(t)$ reste **strictement au-dessus** de y_∞ pour tout $t \geq 0$.
- Si $y_0 < y_\infty$: la solution reste **strictement en dessous** de y_∞ .
- Si $y_0 = y_\infty$: $y(t) = y_\infty$ pour tout t (solution constante).

En effet, $y(t) - y_\infty = (y_0 - y_\infty)e^{at}$ et $e^{at} > 0$ pour tout t .

Les courbes solutions ne **croisent jamais** la droite $y = y_\infty$ (sauf la solution constante elle-même).

✓ Propriété | Variations des solutions de $y' = ay + b$

On peut lire les variations de y directement à partir de l'ED :

- $y'(t) = ay(t) + b$. Donc $y'(t) = 0 \iff y(t) = -\frac{b}{a} = y_\infty$.
- Si $a < 0$ et $y_0 > y_\infty$: $y(t) > y_\infty$ donc $y'(t) = a \underbrace{(y(t) - y_\infty)}_{>0} < 0$ (car $a < 0$). La solution est **décroissante**.
- Si $a < 0$ et $y_0 < y_\infty$: la solution est **croissante** vers y_∞ .

Règle rapide : pour $a < 0$, une solution qui part au-dessus de y_∞ décroît, une solution qui part en dessous croît. Toutes tendent vers y_∞ .

✂ Méthode | Dresser le tableau de variations d'une solution

Pour $y' = -2y + 6$, $y(0) = 1$ (donc $a = -2$, $y_\infty = 3$) :

1. $y_0 = 1 < 3 = y_\infty$ donc $y(t) < y_\infty$ pour tout t .
2. $y'(t) = -2(y(t) - 3) > 0$ car $y(t) - 3 < 0$. Donc y est **strictement croissante**.
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 3$.

t	0	$+\infty$	
$y'(t)$		+	
$y(t)$	1	↗	3

3.9 Vérifier qu'une fonction est solution, retrouver une ED

✂ Méthode | Vérifier qu'une fonction est solution — méthode en 3 étapes

Soit $f(t) = 3e^{-2t} + 1$. Vérifier que f est solution de $y' = -2y + 2$.

1. **Calculer** $f'(t)$: $f'(t) = -6e^{-2t}$.
2. **Calculer** $-2f(t) + 2$: $-2(3e^{-2t} + 1) + 2 = -6e^{-2t} - 2 + 2 = -6e^{-2t}$.
3. **Comparer** : $f'(t) = -6e^{-2t} = -2f(t) + 2$. Donc f est bien solution.

✂ Méthode | Retrouver l'ED à partir de la solution — exercice inverse

On donne $f(t) = 5e^{-3t} + 2$. Déterminer a et b tels que f soit solution de $y' = ay + b$.

Méthode 1 (identification) : La forme $Ce^{at} + y_\infty$ donne $a = -3$ et $y_\infty = 2 = -\frac{b}{a} = \frac{b}{3}$, d'où $b = 6$. ED : $y' = -3y + 6$.

Méthode 2 (calcul direct) : $f'(t) = -15e^{-3t}$ et on veut $f' = af + b$. Donc $-15e^{-3t} = a(5e^{-3t} + 2) + b = 5ae^{-3t} + (2a + b)$.

Par identification : $5a = -15 \Rightarrow a = -3$ et $2a + b = 0 \Rightarrow b = 6$.

3.10 Temps caractéristiques

✓ Propriété | Demi-vie et constante de temps

Pour $y' = ay$ avec $a < 0$ (décroissance), $y(0) = y_0 > 0$:

— **Demi-vie** $t_{1/2}$: temps pour que y soit divisé par 2. $y_0 e^{at_{1/2}} = \frac{y_0}{2}$, d'où $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|a|}$.

— **Constante de temps** $\tau = \frac{1}{|a|}$: $y(\tau) = y_0 e^{-1} \approx 0,37 y_0$. Après 5τ , $y \approx 0,007 y_0$ (quasi-nul).

💡 Exemple

Carbone 14 : $t_{1/2} = 5730$ ans, donc $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$ et $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

3.11 Le problème de Cauchy pour $y' = ay + b$

★ Théorème | Existence et unicité pour $y' = ay + b$

Le problème $y' = ay + b$, $y(t_0) = y_0$ admet une **unique** solution :

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}$$

ou, avec $y_\infty = -\frac{b}{a}$: $y(t) = (y_0 - y_\infty)e^{a(t-t_0)} + y_\infty$.

✂ Méthode | Résoudre $y' = ay + b$ avec condition initiale en 4 étapes

1. **Identifier** a et b dans l'équation (mettre sous forme $y' = ay + b$).
2. **Trouver la solution d'équilibre** : $y_\infty = -\frac{b}{a}$.
3. **Écrire la solution générale** : $y(t) = Ce^{at} + y_\infty$.
4. **Déterminer** C avec $y(t_0) = y_0$: $C = (y_0 - y_\infty)e^{-at_0}$.

3.12 Mise sous forme canonique

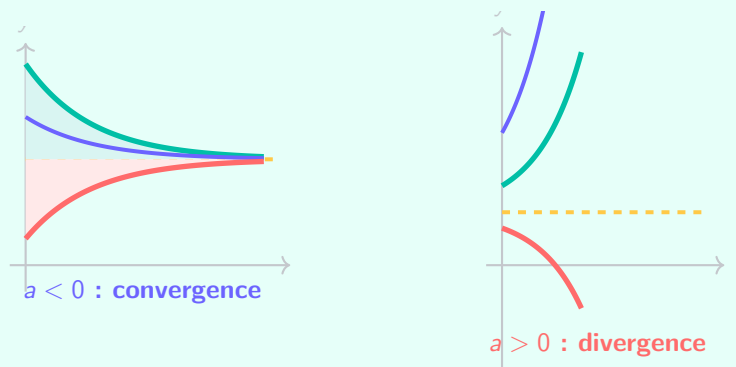
✂ Méthode | Reconnaître une équation $y' = ay + b$ déguisée

Parfois l'équation n'est pas directement sous la forme $y' = ay + b$. Il faut la réarranger :

1. $y' + 3y = 12 \iff y' = -3y + 12$ (ici $a = -3$, $b = 12$).
2. $2y' - y = 8 \iff y' = \frac{1}{2}y + 4$ (diviser par 2 : $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$).
3. $y' = -k(y - L) \iff y' = -ky + kL$ ($a = -k$, $b = kL$, $y_\infty = L$).
4. $3y' + 6y - 9 = 0 \iff y' = -2y + 3$ ($a = -2$, $b = 3$).

3.13 Résumé graphique : allure des solutions

✔ Propriété | Allure des courbes selon le signe de a



3.14 Tableau récapitulatif

✔ Propriété | Synthèse complète

Équation	Solution générale	Solution du p. de Cauchy $y(t_0) = y_0$
$y' = ay$	Ce^{at}	$y_0 e^{a(t-t_0)}$
$y' = ay + b$	$Ce^{at} - \frac{b}{a}$	$(y_0 - y_\infty) e^{a(t-t_0)} + y_\infty$ avec $y_\infty = -\frac{b}{a}$

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les 12 réflexes essentiels

1. **Identifier a et b** : mettre l'équation sous forme $y' = ay + b$.
2. **Chercher l'équilibre** : $y_\infty = -\frac{b}{a}$ (quand $b \neq 0$).
3. **Résoudre l'homogène d'abord** : $y_H = Ce^{at}$.
4. **Trouver une solution particulière** : $y_p = -\frac{b}{a}$ (constante).
5. **Écrire la solution générale** : $y = y_H + y_p = Ce^{at} + y_\infty$.
6. **Déterminer C** par la condition initiale.
7. **Signe de a** : $a < 0 \rightarrow$ convergence ; $a > 0 \rightarrow$ divergence.
8. **Signe de la solution** : $y(t) - y_\infty$ a un signe **constant** (celui de $y_0 - y_\infty$).
9. **Variations** : si $a < 0$ et $y_0 > y_\infty$ alors y décroissante (et inversement).
10. **Vérifier** : dériver la solution et vérifier qu'elle satisfait l'équation.
11. **Demi-vie** : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|a|}$ (décroissance).
12. **Constante de temps** : $\tau = \frac{1}{|a|}$ (temps pour atteindre $\approx 63\%$ de l'équilibre).

Méthode | Mots-clés à repérer dans les énoncés du bac

Tu lis dans l'énoncé...	Tu penses à...
« proportionnel à y »	$y' = ky$: exponentielle
« décroissance exponentielle »	$y' = -\lambda y$, $\lambda > 0$
« tend vers une limite »	$a < 0$, $y_\infty = -\frac{b}{a}$
« demi-vie / période »	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{ a }$
« refroidissement / chauffage »	$y' = -k(y - L)$ avec $k > 0$
« vérifier que y est solution »	calculer y' , remplacer dans l'équation
« déterminer la constante »	condition initiale $y(t_0) = y_0$
« équilibre stable »	$a < 0$, convergence vers y_∞
« montrer que la solution est décroissante »	signe de $y' = a(y - y_\infty)$, tableau de variations
« retrouver l'équation »	identifier a et y_∞ dans $Ce^{at} + y_\infty$
« solution de l'équation homogène »	$y_H = Ce^{at}$, solution de $y' = ay$
« montrer que $y_1 - y_2 \dots$ »	principe de superposition, différence $\rightarrow (E_H)$

⚠ Attention | Top 7 des erreurs au bac ☠

1. **Confondre a et b** dans $y' = ay + b$. Vérifie : a est le coefficient de y , b est le terme constant.
2. **Oublier le signe** dans $y_\infty = -\frac{b}{a}$. C'est bien $-\frac{b}{a}$, pas $\frac{b}{a}$.
3. **Donner la solution générale au lieu de la solution particulière.** Si on te donne $y(0) = y_0$, il faut déterminer C !
4. **Confondre e^{at} et e^{-at} .** Si l'équation est $y' = -3y$, alors $a = -3$ et la solution est e^{-3t} .
5. **Additionner deux solutions de $y' = ay + b$** et croire que c'est solution. Ce n'est **pas** le cas ! Seule la **différence** est solution de l'homogène.
6. **Ne pas dresser le tableau de variations.** L'ED donne directement le signe de y' : exploite-le !
7. **Ne pas vérifier.** Dérive ta solution, remplace dans l'équation, vérifie. 30 secondes qui sauvent des points.

🔧 Méthode | Récapitulatif complet des formules

Résultat	Formule
$y' = ay$: sol. gén.	$y(t) = Ce^{at}$
$y' = ay$ + C.I.	$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$
$y' = ay + b$: équilibre	$y_\infty = -\frac{b}{a}$
$y' = ay + b$: sol. gén.	$y(t) = Ce^{at} + y_\infty$
$y' = ay + b$ + C.I.	$y(t) = (y_0 - y_\infty)e^{a(t-t_0)} + y_\infty$
Demi-vie	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{ a }$
Constante de temps	$\tau = \frac{1}{ a }$

 Méthode | Propriétés structurelles à connaître

Propriété	Formulation
Solution gén. = homog. + partic.	$y = Ce^{at} + y_p$ où $y_p = -\frac{b}{a}$
Différence de 2 solutions de (E)	$y_1 - y_2$ est solution de (E_H)
Somme de solutions de (E_H)	$\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de (E_H)
Signe de $y - y_\infty$	constant : signe de $y_0 - y_\infty$
Variations	$a < 0, y_0 > y_\infty$: décroissante $a < 0, y_0 < y_\infty$: croissante
Les courbes ne se croisent pas	unicité du problème de Cauchy

5 Exercices

Exercice 1 — Solution générale de $y' = ay$

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y' = 5y$
- b) $y' = -3y$
- c) $y' = \frac{y}{2}$
- d) $y' = -0,1y$
- e) $y' = -\frac{y}{7}$
- f) $2y' = 6y$

Exercice 2 — Problèmes de Cauchy pour $y' = ay$

Résoudre :

- a) $y' = 2y, y(0) = 3$.
- b) $y' = -4y, y(0) = 10$.
- c) $y' = y, y(0) = -2$.
- d) $y' = -y, y(1) = 5$.

Exercice 3 — Vérification de solution

- a) Vérifier que $y(t) = 3e^{-2t} + 4$ est solution de $y' = -2y + 8$.
- b) Vérifier que $y(t) = 5e^t - 1$ est solution de $y' = y + 1$.
- c) Vérifier que $y(t) = e^{-t} + 2t - 1$ n'est **pas** solution de $y' = -y + 2$.

Exercice 4 — Solution générale de $y' = ay + b$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution d'équilibre :

- a) $y' = -2y + 6$
- b) $y' = 3y - 12$
- c) $y' = -y + 5$
- d) $y' + 4y = 8$
- e) $2y' - y = 10$
- f) $y' = -0,5y + 3$

Exercice 5 — Problèmes de Cauchy pour $y' = ay + b$

Résoudre :

- a) $y' = -2y + 6, y(0) = 1$.
- b) $y' = 3y - 9, y(0) = 5$.
- c) $y' = -y + 4, y(0) = 0$.
- d) $y' + 3y = 15, y(0) = 2$.
- e) $y' = -0,1y + 2, y(0) = 0$.

Exercice 6 — Limites et comportement asymptotique

Pour chaque solution de l'exercice 5 :

- a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.
- b) Dresser le tableau de variations de y .
- c) Interpréter graphiquement.

Exercice 7 ★★☆☆ — **Décroissance radioactive**

Le carbone 14 se désintègre avec une demi-vie de $t_{1/2} = 5730$ ans. Un échantillon contient initialement $N_0 = 10^{12}$ atomes de ^{14}C .

- Écrire l'équation différentielle vérifiée par $N(t)$.
- Calculer la constante de désintégration λ .
- Exprimer $N(t)$.
- Combien d'atomes restent après 11460 ans ?
- Un objet a perdu 40% de son ^{14}C . Quel est son âge ?

Exercice 8 ★★☆☆ — **Refroidissement de Newton**

Un café à 90°C est posé dans une pièce à 20°C . Sa température $T(t)$ vérifie $T' = -0,05(T - 20)$.

- Mettre sous forme $T' = aT + b$ et identifier a , b , T_∞ .
- Résoudre avec $T(0) = 90$.
- Au bout de combien de temps le café est-il à 50°C ?
- Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Circuit RC (physique)**

Un condensateur de capacité C se charge à travers une résistance R sous une tension E . La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie :

$$u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{E}{RC}$$

- Mettre sous forme $u' = au + b$. Identifier a , b , u_∞ .
- Résoudre avec $u(0) = 0$ (condensateur initialement déchargé).
- Montrer que $u(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63 E$ où $\tau = RC$.
- Au bout de 5τ , quelle fraction de E a-t-on atteinte ?

Exercice 10 ★★☆☆ — **Concentration d'un médicament**

Un médicament est injecté en continu au débit $d = 5$ mg/h. L'organisme l'élimine proportionnellement à sa concentration : $C'(t) = -0,2C(t) + 5$.

- Déterminer la concentration d'équilibre C_∞ .
- Résoudre avec $C(0) = 0$.
- Au bout de combien de temps atteint-on 90% de C_∞ ?
- Tracer l'allure de $C(t)$.

Exercice 11 ★★☆☆ — **Démonstrations de cours**

- Démontrer que les solutions de $y' = ay$ sont $y = Ce^{at}$ (méthode de $z = ye^{-at}$).
- Démontrer que les solutions de $y' = ay + b$ sont $y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.
- Démontrer la formule de la demi-vie $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|a|}$.

Exercice 12 ★★☆☆ — **Étude complète**

On considère $f(t) = 3e^{-2t} + 1$ pour $t \geq 0$.

- Montrer que f est solution d'une équation différentielle $y' = ay + b$ que l'on précisera.
- Calculer $f(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- Étudier les variations de f .
- Calculer l'aire sous la courbe de f entre $t = 0$ et $t = T$, puis la limite quand $T \rightarrow +\infty$.

Exercice 13 ★★ — Équation avec second membre non constant

On considère $y' = -y + e^{-2t}$.

- Vérifier que $y_p(t) = -e^{-2t}$ est une solution particulière.
- En posant $z = y - y_p$, montrer que $z' = -z$.
- En déduire la solution générale.
- Résoudre avec $y(0) = 0$.

Exercice 14 ★★ — Méthode d'Euler

On approche la solution de $y' = -y + 1$, $y(0) = 0$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = 0,5$:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \quad \text{où } f(t, y) = -y + 1$$

- Calculer y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 (i.e. les valeurs approchées en $t = 0, 0,5, 1, 1,5, 2$).
- Calculer la solution exacte et comparer.
- Expliquer pourquoi un pas plus petit donne une meilleure approximation.
- (Bonus)** Montrer que $y_n = (1 - h)^n \cdot y_0 + \frac{1 - (1-h)^n}{1 - (1-h)} \cdot h$ et retrouver la limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 ★★ — Structure des solutions et superposition

On considère $(E) : y' = -2y + 4$ et $(E_H) : y' = -2y$.

- Déterminer la solution générale de (E_H) .
- Vérifier que $y_p(t) = 2$ est solution particulière de (E) .
- En déduire la solution générale de (E) .
- Soient $y_1(t) = 3e^{-2t} + 2$ et $y_2(t) = -e^{-2t} + 2$ deux solutions de (E) . Calculer $y_1 - y_2$. Vérifier que c'est une solution de (E_H) .
- Vérifier que $y_1 + y_2$ n'est **pas** solution de (E) .
- Montrer que $\frac{y_1 + y_2}{2}$ **est** solution de (E) . Pourquoi ? (Penser à $\alpha + \beta = 1$.)

Exercice 16 ★★ — Signe et variations

Soit f la solution de $y' = -3y + 9$, $y(0) = 5$.

- Déterminer $f(t)$.
- Calculer y_∞ . La solution part-elle au-dessus ou en dessous de y_∞ ?
- En déduire le signe de $f'(t)$ pour tout $t \geq 0$, puis les variations de f .
- Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que $f(t) > 3$ pour tout $t \geq 0$. La courbe croise-t-elle la droite $y = 3$?

Exercice 17 ★★ — Retrouver l'équation différentielle

- On donne $f(t) = 4e^{-t} + 1$. Déterminer a et b tels que f soit solution de $y' = ay + b$.
- On donne $g(t) = 7e^{2t} - 3$. Déterminer l'ED vérifiée par g .
- On donne $h(t) = Ae^{-5t} + B$. Sachant que $h(0) = 10$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$, déterminer A , B , et l'ED vérifiée par h .
- On sait que f est solution de $y' = ay + b$ avec $f(0) = 6$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 4$, et que f est décroissante. Que peut-on dire sur a et y_∞ ? Déterminer b .

Exercice 18 ★★☆☆ — Somme de solutions et équations différentes

- a) y_1 est solution de $y' = -y$ et y_2 est solution de $y' = -y$. Montrer que $y_1 + y_2$ est solution de $y' = -y$.
- b) y_1 est solution de $y' = -y + 3$ et y_2 est solution de $y' = -y + 5$. Montrer que $y_1 + y_2$ est solution de $y' = -y + 8$. Généraliser.
- c) y_1 est solution de $y' = 2y + 1$ et y_2 est solution de $y' = 3y$. La fonction $y_1 + y_2$ est-elle solution d'une ED simple ? Justifier.

6 🐼 Problème — Modèle logistique et équation de Verhulst ★★

🔥 Problème style prépa

Le modèle de Malthus ($P' = kP$) prédit une croissance illimitée, ce qui est irréaliste. Le modèle **logistique** de Verhulst (1838) introduit un frein qui limite la population à une capacité maximale K .

On considère l'équation différentielle **logistique** :

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

où $r > 0$ est le taux de croissance intrinsèque et $K > 0$ la capacité limite du milieu. On pose $P(0) = P_0$ avec $0 < P_0 < K$.

Partie A — Étude qualitative

1. Montrer que les solutions constantes sont $P = 0$ et $P = K$.
2. Pour $0 < P < K$, étudier le signe de P' . La population croît-elle ?
3. Montrer que $P''(t) = rP'(t)\left(1 - \frac{2P(t)}{K}\right)$. En déduire que la croissance est la plus rapide quand $P = \frac{K}{2}$ (point d'inflexion).
4. En déduire l'allure de la courbe (courbe en S, dite « sigmoïde »).

Partie B — Résolution explicite par changement de variable

5. On pose $u(t) = \frac{1}{P(t)}$. Montrer que u vérifie l'équation différentielle **linéaire** :

$$u'(t) = -ru(t) + \frac{r}{K}$$

Indication : calculer $u' = -\frac{P'}{P^2}$.

6. Résoudre cette équation (c'est un $y' = ay + b$!). En déduire $u(t)$.
7. En déduire que :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

8. Vérifier que $P(0) = P_0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$.

Partie C — Application numérique

9. On modélise une population de bactéries avec $K = 10\,000$, $r = 0,5 \text{ h}^{-1}$, $P_0 = 100$.
 - a) Calculer $P(t)$.
 - b) À quel instant la population atteint-elle 5000 (la moitié de K) ?
 - c) Vérifier que c'est le point d'inflexion.
10. **(Bonus)** Montrer que pour P_0 petit devant K , on a $P(t) \approx P_0 e^{rt}$ pour les temps courts (retrouver le modèle de Malthus comme approximation).

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

a) $y' = 5y : y(t) = Ce^{5t}$. b) $y' = -3y : y(t) = Ce^{-3t}$. c) $y' = \frac{y}{2} : y(t) = Ce^{t/2}$.

d) $y' = -0,1y : y(t) = Ce^{-0,1t}$. e) $y' = -\frac{y}{7} : y(t) = Ce^{-t/7}$.

f) $2y' = 6y \iff y' = 3y : y(t) = Ce^{3t}$.

Exercice 2

a) $y(t) = Ce^{2t}$, $y(0) = C = 3$. $y(t) = 3e^{2t}$.

b) $y(t) = Ce^{-4t}$, $C = 10$. $y(t) = 10e^{-4t}$.

c) $y(t) = Ce^t$, $C = -2$. $y(t) = -2e^t$.

d) $y(t) = Ce^{-t}$, $y(1) = Ce^{-1} = 5$, $C = 5e$. $y(t) = 5e^{1-t} = 5e^{-(t-1)}$.

Exercice 3

a) $y = 3e^{-2t} + 4$, $y' = -6e^{-2t}$. $-2y + 8 = -2(3e^{-2t} + 4) + 8 = -6e^{-2t} - 8 + 8 = -6e^{-2t} = y'$.
Solution.

b) $y = 5e^t - 1$, $y' = 5e^t$. $y + 1 = 5e^t - 1 + 1 = 5e^t = y'$. Solution.

c) $y = e^{-t} + 2t - 1$, $y' = -e^{-t} + 2$. $-y + 2 = -e^{-t} - 2t + 1 + 2 = -e^{-t} - 2t + 3$. Or $y' = -e^{-t} + 2 \neq -e^{-t} - 2t + 3$. **Pas** solution (sauf si $t = \frac{1}{2}$, mais il faut que ce soit vrai pour tout t).

Exercice 4

a) $y' = -2y + 6 : a = -2$, $b = 6$, $y_\infty = 3$. $y(t) = Ce^{-2t} + 3$.

b) $y' = 3y - 12 : a = 3$, $b = -12$, $y_\infty = 4$. $y(t) = Ce^{3t} + 4$.

c) $y' = -y + 5 : a = -1$, $b = 5$, $y_\infty = 5$. $y(t) = Ce^{-t} + 5$.

d) $y' + 4y = 8 \iff y' = -4y + 8 : a = -4$, $b = 8$, $y_\infty = 2$. $y(t) = Ce^{-4t} + 2$.

e) $2y' - y = 10 \iff y' = \frac{1}{2}y + 5 : a = \frac{1}{2}$, $b = 5$, $y_\infty = -10$. $y(t) = Ce^{t/2} - 10$.

f) $y' = -0,5y + 3 : a = -0,5$, $b = 3$, $y_\infty = 6$. $y(t) = Ce^{-0,5t} + 6$.

Exercice 5

a) $y_\infty = 3$. $y(t) = Ce^{-2t} + 3$, $y(0) = C + 3 = 1$, $C = -2$. $y(t) = -2e^{-2t} + 3$.

b) $y_\infty = 3$. $y(t) = Ce^{3t} + 3$, $y(0) = C + 3 = 5$, $C = 2$. $y(t) = 2e^{3t} + 3$.

c) $y_\infty = 4$. $y(t) = Ce^{-t} + 4$, $y(0) = C + 4 = 0$, $C = -4$. $y(t) = 4(1 - e^{-t})$.

d) $y' = -3y + 15$, $y_\infty = 5$. $y(t) = Ce^{-3t} + 5$, $y(0) = C + 5 = 2$, $C = -3$. $y(t) = -3e^{-3t} + 5$.

e) $y_\infty = 20$. $y(t) = Ce^{-0,1t} + 20$, $y(0) = C + 20 = 0$, $C = -20$. $y(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$.

Exercice 6

a) Limites : (5a) $\rightarrow 3$; (5b) $\rightarrow +\infty$; (5c) $\rightarrow 4$; (5d) $\rightarrow 5$; (5e) $\rightarrow 20$.

b) Variations : (5a) $y' = -2(-2)e^{-2t} = 4e^{-2t} > 0$: **croissante** de 1 vers 3. (5b) $y' = 6e^{3t} > 0$: croissante vers $+\infty$. (5c) $y' = 4e^{-t} > 0$: croissante de 0 vers 4. (5d) $y' = 9e^{-3t} > 0$: croissante de 2 vers 5. (5e) $y' = 2e^{-0,1t} > 0$: croissante de 0 vers 20.

c) Pour (5a) et (5c) : la courbe part de y_0 et monte vers y_∞ en se stabilisant (asymptote horizontale). Pour (5b) : divergence exponentielle ($a > 0$).

Exercice 7

a) $N'(t) = -\lambda N(t)$ (décroissance proportionnelle à la quantité présente).

b) $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 5730$, donc $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$.

c) $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = 10^{12} e^{-1,21 \times 10^{-4} t}$.

d) $11460 = 2 \times 5730 = 2 \times t_{1/2}$. Après 2 demi-vies : $N = \frac{N_0}{4} = 2,5 \times 10^{11}$.

e) Reste 60% : $e^{-\lambda t} = 0,6$, $t = \frac{-\ln 0,6}{\lambda} = \frac{\ln \frac{5}{3}}{\lambda} = \frac{5730 \ln \frac{5}{3}}{\ln 2} \approx 5730 \times 0,737 \approx 4224 \text{ ans}$.

Exercice 8

a) $T' = -0,05T + 0,05 \times 20 = -0,05T + 1$. $a = -0,05$, $b = 1$, $T_\infty = \frac{-1}{-0,05} = 20$.

b) $T(t) = Ce^{-0,05t} + 20$, $T(0) = C + 20 = 90$, $C = 70$. $T(t) = 70e^{-0,05t} + 20$.

c) $T(t) = 50 \iff 70e^{-0,05t} = 30 \iff e^{-0,05t} = \frac{3}{7} \iff t = \frac{-\ln(3/7)}{0,05} = \frac{\ln(7/3)}{0,05} = 20 \ln \frac{7}{3} \approx 16,9$ minutes.

d) Courbe décroissante partant de 90, tendant vers 20 (asymptote horizontale).

Exercice 9

a) $u' + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC} \iff u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$. $a = -\frac{1}{RC}$, $b = \frac{E}{RC}$. $u_\infty = -\frac{b}{a} = E$.

b) $u(t) = Ce^{-t/(RC)} + E$, $u(0) = C + E = 0$, $C = -E$. $u(t) = E(1 - e^{-t/(RC)})$.

c) $u(\tau) = u(RC) = E(1 - e^{-1}) = E(1 - \frac{1}{e}) \approx 0,632 E \approx 63\%$ de E .

d) $u(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \approx E(1 - 0,0067) \approx 0,993 E \approx 99,3\%$ de E . Quasi-chargé.

Exercice 10

a) Équilibre : $-0,2C_\infty + 5 = 0$, $C_\infty = \frac{5}{0,2} = 25 \text{ mg/L}$.

b) $C(t) = Ke^{-0,2t} + 25$, $C(0) = K + 25 = 0$, $K = -25$. $C(t) = 25(1 - e^{-0,2t})$.

c) 90% de $C_\infty = 22,5$. $25(1 - e^{-0,2t}) = 22,5 \iff e^{-0,2t} = 0,1 \iff t = \frac{\ln 10}{0,2} = 5 \ln 10 \approx 11,5 \text{ h}$.

d) Courbe croissante partant de 0, tendant vers 25, avec point d'inflexion implicite en $t = 0$ (concavité toujours négative ici car $C'' < 0$ pour $t > 0$).

Exercice 11

a) On pose $z(t) = y(t)e^{-at}$. $z' = y'e^{-at} - aye^{-at} = e^{-at}(y' - ay)$. Si $y' = ay$: $z' = 0$, donc $z = C$ constante. $ye^{-at} = C$, i.e. $y = Ce^{at}$. Réciproquement, $y = Ce^{at} \Rightarrow y' = Ca e^{at} = ay$.

b) On cherche y_p constante : $0 = ay_p + b$, $y_p = -\frac{b}{a}$. On pose $z = y - y_p$: $z' = y' = a(z + y_p) + b = az + ay_p + b = az$. Donc $z = Ce^{at}$. $y = Ce^{at} + y_p = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

c) $y(t) = y_0 e^{at}$ avec $a < 0$, $y_0 > 0$. $y(t_{1/2}) = \frac{y_0}{2}$: $y_0 e^{at_{1/2}} = \frac{y_0}{2}$. $e^{at_{1/2}} = \frac{1}{2}$. $at_{1/2} = -\ln 2$. $t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{a} = \frac{\ln 2}{|a|}$.

Exercice 12

a) $f(t) = 3e^{-2t} + 1$, $f'(t) = -6e^{-2t}$. Calculons $-2f + 2 = -2(3e^{-2t} + 1) + 2 = -6e^{-2t} - 2 + 2 = -6e^{-2t} = f'$. Donc f est solution de $y' = -2y + 2$ ($a = -2$, $b = 2$).

b) $f(0) = 3 + 1 = 4$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 + 1 = 1 = y_\infty = -\frac{2}{-2}$. Cohérent.

c) $f'(t) = -6e^{-2t} < 0$ pour tout $t \geq 0$: f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, de 4 vers 1.

d) $\int_0^T f(t) dt = \int_0^T (3e^{-2t} + 1) dt = [-\frac{3}{2}e^{-2t} + t]_0^T = -\frac{3}{2}e^{-2T} + T + \frac{3}{2}$.

Quand $T \rightarrow +\infty$: $\int_0^T f \rightarrow +\infty$ (la partie T domine). L'aire n'est pas finie car $f \rightarrow 1 \neq 0$.

Mais l'aire entre la courbe et l'asymptote $y = 1$ est : $\int_0^{+\infty} (f(t) - 1) dt = \int_0^{+\infty} 3e^{-2t} dt = [-\frac{3}{2}e^{-2t}]_0^{+\infty} = \frac{3}{2}$.

Exercice 13

a) $y_p = -e^{-2t}$, $y'_p = 2e^{-2t}$. $-y_p + e^{-2t} = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t} = y'_p$. Solution.

b) $z = y - y_p = y + e^{-2t}$, $z' = y' + 2e^{-2t}$. Or $y' = -y + e^{-2t} = -(z - e^{-2t}) + e^{-2t} = -z + 2e^{-2t}$.

Donc $z' = -z + 2e^{-2t} + 2e^{-2t}$...non, recalculons. $z = y + e^{-2t}$, $z' = y' - 2e^{-2t}$. Et $y' = -y + e^{-2t} = -(z - e^{-2t}) + e^{-2t} = -z + 2e^{-2t}$. Donc $z' = -z + 2e^{-2t} - 2e^{-2t} = -z$. $z' = -z$.

c) $z(t) = Ce^{-t}$, $y = z - e^{-2t} = Ce^{-t} - e^{-2t}$.

Solution générale : $y(t) = Ce^{-t} - e^{-2t}$.

d) $y(0) = C - 1 = 0$, $C = 1$. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

Exercice 14

a) $f(t, y) = -y + 1$, $h = 0,5$. $y_0 = 0$.

$y_1 = y_0 + 0,5 \times (-0 + 1) = 0,5$.

$y_2 = 0,5 + 0,5 \times (-0,5 + 1) = 0,5 + 0,25 = 0,75$.

$y_3 = 0,75 + 0,5 \times (-0,75 + 1) = 0,75 + 0,125 = 0,875$.

$y_4 = 0,875 + 0,5 \times (-0,875 + 1) = 0,875 + 0,0625 = 0,9375$.

b) Solution exacte : $y' = -y + 1$, $y(0) = 0$, $y_\infty = 1$. $y(t) = 1 - e^{-t}$.

$y(0) = 0$, $y(0,5) \approx 0,393$, $y(1) \approx 0,632$, $y(1,5) \approx 0,777$, $y(2) \approx 0,865$.

Comparaison : Euler surestime ($0,5 > 0,393$, etc.) car la méthode utilise la pente au début de l'intervalle, alors que la pente diminue.

c) Avec un pas plus petit, les rectangles approximent mieux la courbe : l'erreur sur chaque pas est proportionnelle à h^2 , et il y a $n = \frac{T}{h}$ pas, donc l'erreur totale est de l'ordre de h . $h \rightarrow 0$ donne la solution exacte.

d) (Bonus) $y_{n+1} = (1 - h)y_n + h$. C'est une suite arithmético-géométrique de raison $q = 1 - h = 0,5$ et point fixe ℓ tel que $\ell = (1 - h)\ell + h$, i.e. $\ell = 1$. Donc $y_n - 1 = (y_0 - 1)(1 - h)^n = -(1 - h)^n$ et $y_n = 1 - (1 - h)^n = 1 - 0,5^n$. Quand $n \rightarrow +\infty$: $y_n \rightarrow 1 = y_\infty$.

Exercice 15

a) $(E_H) : y' = -2y$. Solution générale : $y_H(t) = Ce^{-2t}$.

b) $y_p(t) = 2 : y'_p = 0$ et $-2 \times 2 + 4 = 0$. Donc $y'_p = -2y_p + 4$. ✓

c) Par le principe de superposition : $y(t) = y_H(t) + y_p = Ce^{-2t} + 2$.

d) $y_1 - y_2 = 3e^{-2t} + 2 - (-e^{-2t} + 2) = 4e^{-2t}$. Vérifions : $(4e^{-2t})' = -8e^{-2t} = -2 \times 4e^{-2t}$. C'est bien solution de (E_H) . ✓

e) $y_1 + y_2 = 3e^{-2t} - e^{-2t} + 4 = 2e^{-2t} + 4$. $(y_1 + y_2)' = -4e^{-2t}$.

$-2(y_1 + y_2) + 4 = -2(2e^{-2t} + 4) + 4 = -4e^{-2t} - 4 \neq -4e^{-2t}$. Pas solution de (E) . ✗

f) $\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-2t} + 2$. $(\frac{y_1 + y_2}{2})' = -2e^{-2t}$ et $-2(e^{-2t} + 2) + 4 = -2e^{-2t}$. ✓

C'est parce que $\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$ avec $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$: quand les coefficients somment à 1, la combinaison barycentrique de solutions de (E) est encore solution de (E) (car $(\alpha + \beta)b = 1 \times b = b$).

Exercice 16

a) $a = -3$, $b = 9$, $y_\infty = -\frac{9}{-3} = 3$. Solution : $y(t) = Ce^{-3t} + 3$. $y(0) = C + 3 = 5$, $C = 2$.

$$f(t) = 2e^{-3t} + 3.$$

b) $y_\infty = 3$. $f(0) = 5 > 3$. La solution part **au-dessus** de y_∞ .

c) $f'(t) = -6e^{-3t} < 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc f est **strictement décroissante**.

Autre méthode : $f'(t) = -3(f(t) - 3) = -3 \times 2e^{-3t} < 0$ car $f(t) > 3$.

d) Tableau :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		—
$f(t)$	5	3

e) $f(t) - 3 = 2e^{-3t} > 0$ pour tout t car l'exponentielle est toujours strictement positive. Donc $f(t) > 3$ pour tout $t \geq 0$. La courbe ne croise **jamais** la droite $y = 3$: elle s'en approche asymptotiquement par au-dessus.

Exercice 17

a) $f(t) = 4e^{-t} + 1$. Forme $Ce^{at} + y_\infty$: $a = -1$, $y_\infty = 1 = -\frac{b}{a} = b$, d'où $b = 1$. ED : $y' = -y + 1$.

Vérification : $f' = -4e^{-t}$ et $-f + 1 = -(4e^{-t} + 1) + 1 = -4e^{-t}$. OK.

b) $g(t) = 7e^{2t} - 3$. $a = 2$, $y_\infty = -3 = -\frac{b}{2}$, $b = 6$. ED : $y' = 2y + 6$.

Vérification : $g' = 14e^{2t}$ et $2g + 6 = 14e^{2t} - 6 + 6 = 14e^{2t}$. OK.

c) $h(0) = A + B = 10$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = B = 2$ (car $a = -5 < 0$). Donc $A = 8$.

$h(t) = 8e^{-5t} + 2$. ED : $a = -5$, $y_\infty = 2 = -\frac{b}{-5}$, $b = 10$. $y' = -5y + 10$.

d) f décroissante et $\lim f = 4$: nécessairement $a < 0$ (convergence) et $y_\infty = 4 = -\frac{b}{a}$, d'où $b = -4a$. De plus $f(0) = 6 > 4 = y_\infty$ (part au-dessus). Pas assez d'info pour trouver a seul, mais $b = -4a > 0$.

Exercice 18

a) $y_1' = -y_1$ et $y_2' = -y_2$. $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = -y_1 - y_2 = -(y_1 + y_2)$. Donc $y_1 + y_2$ est solution de $y' = -y$. C'est la stabilité par addition de l'équation homogène.

b) $y_1' = -y_1 + 3$ et $y_2' = -y_2 + 5$. $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = (-y_1 + 3) + (-y_2 + 5) = -(y_1 + y_2) + 8$.

Donc $y_1 + y_2$ est solution de $y' = -y + 8$. On peut généraliser : si y_1 est solution de $y' = ay + b_1$ et y_2 de $y' = ay + b_2$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $y' = ay + (b_1 + b_2)$. Le coefficient a doit être le **même**.

c) $y_1' = 2y_1 + 1$ et $y_2' = 3y_2$. $(y_1 + y_2)' = 2y_1 + 1 + 3y_2$. On ne peut pas écrire cela sous la forme $c(y_1 + y_2) + d$ car les coefficients de y_1 et y_2 sont différents ($2 \neq 3$). Il n'y a **pas** d'ED simple de la forme $y' = ay + b$ satisfaite par $y_1 + y_2$ en général. Le principe de superposition ne fonctionne **que** pour le même coefficient a .

Corrigé du problème — Modèle logistique de Verhulst

Partie A — Étude qualitative

1. Solutions constantes : $P' = 0 \iff rP(1 - \frac{P}{K}) = 0 \iff P = 0$ ou $1 - \frac{P}{K} = 0 \iff P = K$.

Les deux solutions constantes sont $P = 0$ et $P = K$.

2. Pour $0 < P < K$: $r > 0$, $P > 0$ et $1 - \frac{P}{K} > 0$ (car $P < K$). Donc $P' = rP(1 - \frac{P}{K}) > 0$: la population **croît**.

3. $P' = rP - \frac{r}{K}P^2$. Dérivons :

$$P'' = rP' - \frac{2r}{K}PP' = P'(r - \frac{2rP}{K}) = rP'(1 - \frac{2P}{K}).$$

$$P'' = 0 \iff P' = 0 \text{ (exclu si } 0 < P < K) \text{ ou } 1 - \frac{2P}{K} = 0 \iff P = \frac{K}{2}.$$

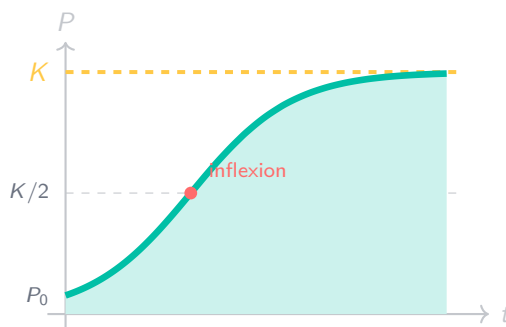
Signe de P'' : $P' > 0$, donc P'' a le signe de $1 - \frac{2P}{K}$.

$P < \frac{K}{2}$: $P'' > 0$ (croissance accélérée, concavité vers le haut).

$P > \frac{K}{2}$: $P'' < 0$ (croissance ralentie, concavité vers le bas).

Le **point d'inflexion** est en $P = \frac{K}{2}$: c'est là que la croissance est la plus rapide.

4. Allure : la courbe est en **S** (sigmoïde). Elle part de P_0 , croît d'abord de plus en plus vite (concavité +), puis de moins en moins vite (concavité -), et tend vers K .



Partie B — Résolution explicite

5. $u = \frac{1}{P}$, donc $u' = -\frac{P'}{P^2}$. Or $P' = rP(1 - \frac{P}{K}) = rP - \frac{r}{K}P^2$.

$$u' = -\frac{rP - \frac{r}{K}P^2}{P^2} = -\frac{r}{P} + \frac{r}{K} = -ru + \frac{r}{K}.$$

Donc $u' = -ru + \frac{r}{K}$: c'est bien $y' = ay + b$ avec $a = -r$, $b = \frac{r}{K}$.

6. $u_\infty = -\frac{b}{a} = -\frac{r/K}{-r} = \frac{1}{K}$. Solution générale : $u(t) = Ae^{-rt} + \frac{1}{K}$.

Condition initiale : $u(0) = \frac{1}{P_0} = A + \frac{1}{K}$, $A = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{K} = \frac{K-P_0}{KP_0}$.

$$u(t) = \frac{K-P_0}{KP_0}e^{-rt} + \frac{1}{K} = \frac{(K-P_0)e^{-rt} + P_0}{KP_0}.$$

7. $P(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{KP_0}{P_0 + (K-P_0)e^{-rt}}$.

On multiplie numérateur et dénominateur par $\frac{1}{P_0}$:

$$P(t) = \frac{\frac{K}{P_0}}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-rt}}.$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-rt}}$$

8. $P(0) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)} = \frac{K}{K/P_0} = P_0$. Correct.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{K}{1+0} = K$ car $e^{-rt} \rightarrow 0$. La population tend bien vers la capacité limite.

Partie C — Application numérique

9a. $K = 10\,000$, $r = 0,5$, $P_0 = 100$. $\frac{K}{P_0} - 1 = 99$.

$$P(t) = \frac{10\,000}{1 + 99e^{-0,5t}}.$$

9b. $P(t) = 5000 \iff 1 + 99e^{-0,5t} = 2 \iff 99e^{-0,5t} = 1 \iff e^{-0,5t} = \frac{1}{99}$.

$$t = \frac{\ln 99}{0,5} = 2 \ln 99 \approx 2 \times 4,595 \approx 9,19 \text{ heures.}$$

9c. $P(t^*) = 5000 = \frac{K}{2}$ correspond bien au point d'inflexion (question 3).

On peut vérifier : $P''(t^*) = rP'(t^*)(1 - \frac{2 \times 5000}{10\,000}) = rP'(t^*) \times 0 = 0$.

10. Pour $P_0 \ll K$ et t petit : $\frac{P}{K} \approx 0$, donc $P' \approx rP$. La solution approchée est $P(t) \approx P_0 e^{rt}$ (modèle de Malthus).

Dans la formule exacte : pour t petit, $e^{-rt} \approx 1 - rt$, donc $(\frac{K}{P_0} - 1)e^{-rt} \approx \frac{K}{P_0} - 1 \gg 1$ (car $P_0 \ll K$).
Numérateur K et dénominateur $\approx \frac{K}{P_0}e^{-rt}$, d'où $P(t) \approx \frac{K}{K/P_0 \cdot e^{-rt}} = P_0 e^{rt}$.

Le modèle logistique **contient** le modèle de Malthus comme cas limite (petite population, temps courts). L'effet de saturation n'apparaît que lorsque P se rapproche de K .

Fin de la Fiche 14 — Équations différentielles

Tu maîtrises maintenant :

- La résolution de $y' = ay$ et $y' = ay + b$ (solution générale et problème de Cauchy).
- Le **principe de superposition** : sol. gén. = homogène + particulière.
- Les propriétés structurelles : somme, différence de solutions, signe, variations.
 - L'interprétation graphique (convergence / divergence, équilibre, faisceau de courbes).
- Les temps caractéristiques (demi-vie, constante de temps), la méthode d'Euler.
 - Le modèle logistique de Verhulst (problème style prépa).

Les équations différentielles sont le langage universel de la physique et des sciences de la nature. Toute loi d'évolution s'exprime sous cette forme.

→ **Prochaine étape : Probabilités conditionnelles & Formules de Bayes.**