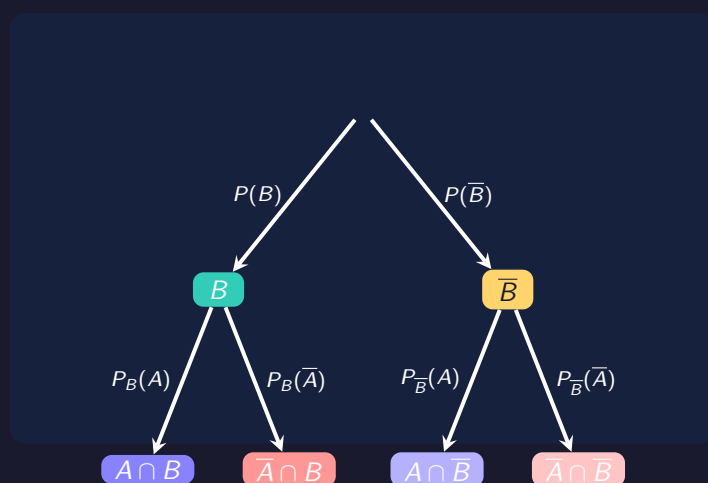


Probabilités conditionnelles & Formule de Bayes

$P_B(A)$ ■ Indépendance ■ Probabilités totales ■ Bayes



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier les probabilités conditionnelles ?	3
1.1	De quoi parle-t-on ?	3
1.2	Les applications concrètes	3
1.3	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	L'univers rétrécit	4
2.2	L'arbre pondéré : l'outil central	4
2.3	Inverser un arbre : l'idée de Bayes	5
3	🎓 Le cours formel	6
3.1	Rappels : probabilités de base	6
3.2	Probabilité conditionnelle	6
3.3	Formule de multiplication (règle de la chaîne)	7
3.4	Partition de l'univers et probabilités totales	8
3.5	Formule de Bayes	9
3.6	Indépendance de deux événements	10
3.7	Succession d'épreuves indépendantes	11
3.8	Variables aléatoires et espérance (rappels et compléments)	11
3.9	Lecture et construction d'arbres pondérés	12
3.10	Tableaux à double entrée	13
3.11	Erreurs classiques et pièges	14
4	🧰 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	✍ Exercices	17
6	🔑 Problème — <i>Le problème du prisonnier</i> ★★ ★	20
7	✔ Corrigés détaillés	21

1 ? Pourquoi étudier les probabilités conditionnelles ?

1.1 De quoi parle-t-on ?

En Première, on a calculé des probabilités « absolues » : $P(A)$ est la probabilité de A dans l'univers entier Ω . Mais dans la vie réelle, on dispose souvent d'une **information partielle**. Savoir qu'un patient est fumeur change la probabilité qu'il ait un cancer. Savoir qu'un élève a réussi le contrôle de maths change la probabilité qu'il réussisse l'examen final. La **probabilité conditionnelle** est l'outil qui permet de **mettre à jour** les probabilités en fonction d'une information.

1.2 Les applications concrètes



1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

Quand on sait que B est réalisé, l'univers se **rétrécit** à B . La probabilité conditionnelle $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **recalibre** les probabilités dans ce nouvel univers. La formule de Bayes permet d'**inverser** le conditionnement : connaissant l'effet, remonter à la cause.

2 L'idée avant la formule

2.1 L'univers rétrécit

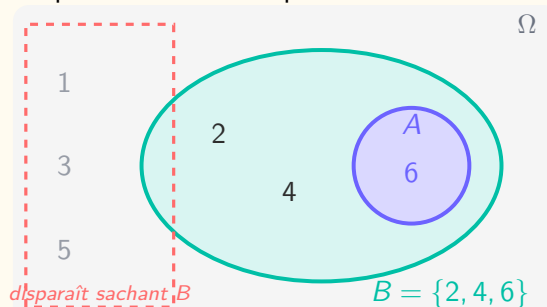
Intuition | Penser avec un diagramme de Venn

On lance un dé équilibré. $A = \{6\}$ (obtenir un 6) et $B = \{2, 4, 6\}$ (obtenir un nombre pair).

Sans information : $P(A) = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$.

Sachant que le résultat est pair (i.e. sachant B) : l'univers se réduit à $\{2, 4, 6\}$. Le 6 est l'un des 3 résultats possibles, donc $P_B(A) = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$.

L'information « le résultat est pair » a **doublé** la probabilité d'obtenir un 6.

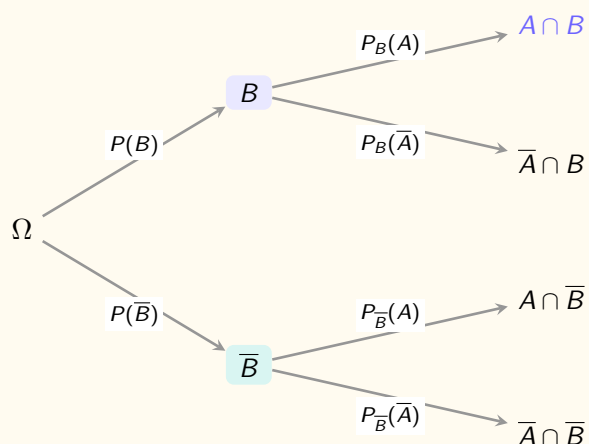


2.2 L'arbre pondéré : l'outil central

Intuition | L'arbre de probabilités

Un arbre pondéré représente une expérience aléatoire en **deux étapes**. Les règles fondamentales :

- Règle des nœuds** : la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud vaut 1.
- Règle des chemins** : la probabilité d'une issue (feuille) est le **produit** des probabilités le long du chemin.
- Règle de la somme** : la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.



2.3 Inverser un arbre : l'idée de Bayes

Intuition | Le problème fondamental de Bayes

Un test médical a les caractéristiques suivantes :

- **Prévalence** : 2% de la population est malade ($P(M) = 0,02$).
- **Sensibilité** : si malade, le test est positif à 99% ($P_M(+) = 0,99$).
- **Spécificité** : si sain, le test est négatif à 95% ($P_{\overline{M}}(-) = 0,95$).

Question : si le test est positif, quelle est la probabilité d'être réellement malade ?

La réponse intuitive est « presque 100% ». La réalité est **surprenante** : $P_+(M) \approx 29\%$ seulement ! C'est le **paradoxe des faux positifs**. On le démontrera rigoureusement dans le cours.

3 Le cours formel

3.1 Rappels : probabilités de base

✓ Propriété | Rappels de Première

- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A .
- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3.2 Probabilité conditionnelle

Définition | Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de probabilité **non nulle** ($P(B) > 0$). La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On note indifféremment $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ (la notation $P_B(A)$ est privilégiée au bac).

Attention | Définition vs. intuition

$P_B(A)$ n'est **pas** la probabilité que B entraîne A (pas de causalité). C'est la probabilité de A **quand on sait que B est réalisé**, c'est-à-dire quand l'univers est restreint à B .

✓ Propriété | P_B est une probabilité sur B

Si $P(B) > 0$, alors P_B vérifie tous les axiomes d'une probabilité :

- $0 \leq P_B(A) \leq 1$ pour tout A .
- $P_B(B) = 1$ et $P_B(\emptyset) = 0$.
- $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$ (complémentaire **dans** B).
- $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Démonstration

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \text{ car } P(A \cap B) \geq 0 \text{ et } P(B) > 0.$$

$$P_B(A) \leq 1 \text{ car } A \cap B \subset B \text{ donc } P(A \cap B) \leq P(B).$$

$$P_B(B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P_B(A) \text{ car } (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B \text{ et ces deux ensembles sont disjoints.}$$

 Exemple | Dé équilibré

$A = \{6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ (pair). $P(A \cap B) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$. $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P_B(A) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$. Sachant que le résultat est pair, la probabilité d'avoir 6 est $\frac{1}{3}$.

 Exemple | Deux cartes d'un jeu de 32

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. $A = \text{« tirer un roi »}$, $B = \text{« tirer une figure »}$ (roi, dame, valet).

$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. $P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $A \subset B$ donc $A \cap B = A$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

$P_B(A) = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$. Sachant qu'on a une figure, la probabilité que ce soit un roi est $\frac{1}{3}$ (3 types de figures).

3.3 Formule de multiplication (règle de la chaîne)

 Théorème | Probabilité de l'intersection

Pour tous événements A et B avec $P(B) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Plus généralement, si $P(A) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

 Attention | Symétrie

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$$

C'est la même intersection, mais lue « dans deux sens » différents. Cette symétrie est à la base de la formule de Bayes.

 Propriété | Extension à 3 événements

Si $P(A \cap B) > 0$:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$$

C'est la **règle de la chaîne** : on conditionne successivement.

 Exemple | Tirage sans remise

Urne : 5 rouges, 3 bleues. On tire 2 boules **sans remise**.

$$P(2 \text{ rouges}) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

$$P(2 \text{ bleues}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

$$P(1 \text{ de chaque}) = 1 - \frac{5}{14} - \frac{3}{28} = 1 - \frac{10}{28} - \frac{3}{28} = \frac{15}{28}.$$

3.4 Partition de l'univers et probabilités totales

Définition | Partition (ou système complet d'événements)

Des événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une **partition** de Ω si :

- ils sont **deux à deux incompatibles** : $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$,
- ils **recouvrent** Ω : $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
- chacun a une probabilité **non nulle** : $P(B_i) > 0$ pour tout i .

Le cas le plus fréquent au bac : la partition $\{B, \bar{B}\}$ (deux événements complémentaires).

★ Théorème | Formule des probabilités totales

Si $B_1, \dots, B_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Cas particulier avec $\{B, \bar{B}\}$:

$$P(A) = P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A)$$

Démonstration | Exigible

Les B_i partitionnent Ω , donc $A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$.

Les $(A \cap B_i)$ sont deux à deux disjoints (car les B_i le sont). Par additivité :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A).$$

Intuition | Interprétation graphique : les chemins de l'arbre

La formule des probabilités totales dit simplement : **on additionne les probabilités de tous les chemins qui mènent à A** . Dans un arbre, c'est la somme des produits le long de chaque chemin aboutissant à A .

Exemple | Application — test médical (suite)

M = malade, $+$ = test positif. $P(M) = 0,02$, $P_M(+) = 0,99$, $P_{\bar{M}}(+) = 0,05$.

Par les probabilités totales avec la partition $\{M, \bar{M}\}$:

$$\begin{aligned} P(+) &= P(M) \cdot P_M(+) + P(\bar{M}) \cdot P_{\bar{M}}(+) \\ &= 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,05 = 0,0198 + 0,049 = 0,0688. \end{aligned}$$

Environ 6,9% de la population a un test positif.

3.5 Formule de Bayes

★ Théorème | Formule de Bayes — inverser le conditionnement

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}$$

Avec la formule des probabilités totales au dénominateur (partition $\{B, \bar{B}\}$) :

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A)}$$

Version générale avec une partition $\{B_1, \dots, B_n\}$:

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \times P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A)}$$

Démonstration

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}.$$

On remplace $P(A)$ par la formule des probabilités totales.

Intuition | Ce que fait Bayes

Avant le test : on connaît $P(B)$ (probabilité *a priori* de B).

Après avoir observé A : on calcule $P_A(B)$ (probabilité *a posteriori* de B).

Bayes **met à jour** nos croyances en tenant compte de l'observation. C'est la base de la **statistique bayésienne**.

Exemple | Le paradoxe des faux positifs — résolution complète

Reprenons : $P(M) = 0,02$, $P_M(+)=0,99$, $P_{\bar{M}}(+)=0,05$.

On a calculé $P(+)=0,0688$. Par Bayes :

$$P_+(M) = \frac{P(M) \times P_M(+)}{P(+)} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0688} = \frac{0,0198}{0,0688} \approx 0,288 \approx 29\%.$$

Interprétation : même avec un test très fiable (sensibilité 99%, spécificité 95%), si la maladie est **rare** (2%), un test positif ne donne qu'environ 29% de chance d'être réellement malade !

Pourquoi ? Les faux positifs (5% des 98% de sains = 4,9%) sont beaucoup plus nombreux que les vrais positifs (99% des 2% de malades = 1,98%). Sur 10 000 personnes :

	Test +	Test -
Malades (200)	198 (VP)	2 (FN)
Sains (9800)	490 (FP)	9310 (VN)

Parmi les $198 + 490 = 688$ tests positifs, seuls 198 sont réellement malades : $\frac{198}{688} \approx 29\%$.

✂ Méthode | Appliquer Bayes en 4 étapes

1. **Identifier la partition** : causes $B_1, \dots, B_n$ (« avant »).
2. **Construire l'arbre** avec $P(B_i)$ et $P_{B_i}(A)$.
3. **Calculer** $P(A)$ par les probabilités totales.
4. **Appliquer Bayes** : $P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \times P_{B_j}(A)}{P(A)}$.

3.6 Indépendance de deux événements

☰ Définition | Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

De manière équivalente (si $P(B) > 0$) : A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.
Cela signifie : **savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A .**

✓ Propriété | Propriétés de l'indépendance

Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

✎ Démonstration

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

⚠ Attention | Indépendance $\neq$ incompatibilité !

Deux événements **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$) sont très **dépendants** : si l'un se réalise, l'autre ne peut pas. En fait, si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors A et B incompatibles $\Rightarrow A$ et B **dépendants** (car $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$).

⚠ Attention | L'indépendance ne se voit pas sur un diagramme !

L'indépendance est une propriété **numérique**, pas géométrique. On ne peut pas la deviner en regardant un diagramme de Venn. Il faut **calculer** et vérifier que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

💡 Exemple | Vérifier l'indépendance

On lance deux dés. $A = \text{« le premier dé donne 6 »}$, $B = \text{« la somme est 7 »}$.

$$P(A) = \frac{1}{6}. \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \quad A \cap B = \{(6, 1)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B). \quad A \text{ et } B \text{ sont } \mathbf{\text{indépendants}}.$$

Maintenant $C = \text{« la somme est 8 »}$. $P(C) = \frac{5}{36}$. $A \cap C = \{(6, 2)\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$.

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36}. \quad A \text{ et } C \text{ sont } \mathbf{\text{dépendants}}.$$

3.7 Succession d'épreuves indépendantes

📖 Définition | Épreuves indépendantes

Des expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de chacune ne dépend pas des résultats des autres. Formellement, pour des événements $A_1, \dots, A_n$ associés à chaque épreuve :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

💡 Exemple | Tirages avec et sans remise

Avec remise : la composition de l'urne est la même à chaque tirage. Les épreuves sont **indépendantes**.

Sans remise : retirer une boule modifie la composition. Les épreuves sont **dépendantes**. → Probabilités conditionnelles.

✅ Propriété | Probabilité d'une série de succès indépendants

Si n épreuves indépendantes ont chacune probabilité de succès $p_1, \dots, p_n$:

$$P(\text{tous succès}) = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

Si les épreuves sont identiques ($p_i = p$) : $P(\text{tous succès}) = p^n$.

$$P(\text{au moins un échec}) = 1 - p^n.$$

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n.$$

3.8 Variables aléatoires et espérance (rappels et compléments)

📖 Définition | Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque issue un nombre réel. La **loi** de X est donnée par les valeurs x_i et les probabilités $P(X = x_i)$.

✅ Propriété | Espérance, variance, écart-type

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\mathbf{\text{Linéarité}} : E(aX + b) = aE(X) + b. \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

 Propriété | Espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle de X sachant B est :

$$E_B(X) = \sum_i x_i P_B(X = x_i)$$

Formule de l'espérance totale : si $\{B_1, \dots, B_n\}$ partition :

$$E(X) = \sum_{j=1}^n P(B_j) E_{B_j}(X)$$

3.9 Lecture et construction d'arbres pondérés

 Méthode | Construire un arbre pondéré en 5 étapes

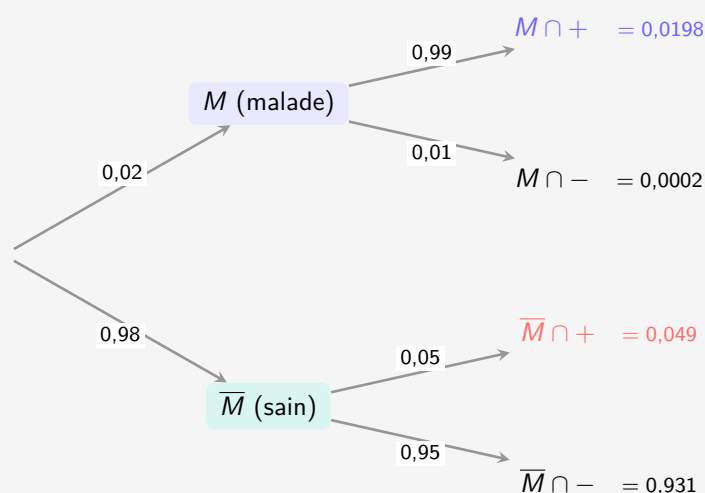
1. **Identifier les étapes** de l'expérience (généralement 2 ou 3).
2. **Dessiner les branches de niveau 1** avec $P(B_i)$.
3. **Dessiner les branches de niveau 2** avec $P_{B_i}(A)$ (conditionnées).
4. **Vérifier les nœuds** : les branches partant d'un nœud somment à 1.
5. **Lire les résultats** : chaque feuille donne $P(B_i \cap A) = P(B_i) \times P_{B_i}(A)$.

 Méthode | Lire un arbre à l'envers (Bayes)

Pour calculer $P_A(B_j)$ à partir d'un arbre :

1. **Repérer tous les chemins menant à A** (les feuilles contenant A).
2. **Calculer $P(A)$** en additionnant les probabilités de ces chemins.
3. **Isoler le chemin passant par B_j et menant à A** : sa probabilité est $P(B_j) \times P_{B_j}(A)$.
4. **Diviser** : $P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \times P_{B_j}(A)}{P(A)}$.

Exemple | Arbre complet — test médical



$$P(+) = 0,0198 + 0,049 = 0,0688. \quad P_+(M) = \frac{0,0198}{0,0688} \approx 28,8\%.$$

3.10 Tableaux à double entrée

Méthode | Méthode alternative : le tableau de contingence

Au lieu d'un arbre, on peut utiliser un **tableau à double entrée** :

	A	$\bar{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Total	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Les probabilités conditionnelles se lisent en divisant par la ligne ou la colonne correspondante. Ce tableau est particulièrement utile pour vérifier l'indépendance : A et B indépendants $\iff$ chaque case est le produit de sa marge ligne par sa marge colonne.

Exemple | Test avec tableau de contingence (pour 10 000 personnes)

	Malade	Sain	Total
Test +	198	490	688
Test -	2	9310	9312
Total	200	9800	10 000

$P_+(M) = \frac{198}{688} \approx 28,8\%$. On retrouve le même résultat, mais de façon plus concrète.

3.11 Erreurs classiques et pièges

⚠ Attention | Confusion $P_B(A)$ et $P_A(B)$ — le piège mortel

$P_B(A) \neq P_A(B)$ en général ! C'est la source de l'**erreur du procureur** :

Erreur : « L'ADN correspond avec probabilité 1 sur 1 million, donc le suspect est coupable à 99,9999%. »

Réalité : $P_{\text{coupable}}(\text{ADN match}) \approx 1$ et $P_{\text{coupable}}(\text{ADN match}) = 10^{-6}$, mais $P_{\text{ADN match}}(\text{coupable})$ dépend de la **population suspecte**. Si la ville a 10 millions d'habitants, environ 10 innocents ont aussi cet ADN !

⚠ Attention | $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ sauf si indépendants

L'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ est la **définition** de l'indépendance, pas une formule générale.
En général : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les 10 réflexes essentiels

1. **Définir** $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dès qu'on dit « sachant que ».
2. **Construire l'arbre** : d'abord les causes (B_i), puis les effets (A).
3. **Vérifier les nœuds** : chaque nœud somme à 1.
4. **Probabilités totales** pour calculer $P(A)$: additionner tous les chemins vers A .
5. **Bayes pour inverser** : $P_A(B_j) = \frac{\text{chemin vers } B_j \text{ et } A}{P(A)}$.
6. **Indépendance** : vérifier $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (pas à vue!).
7. **Ne pas confondre** $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
8. $P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$: l'événement contraire est ton ami.
9. **Avec remise** $\rightarrow$ **indépendant**, sans remise $\rightarrow$ conditionnel.
10. **Tableau à double entrée** pour les problèmes concrets (effectifs ou probabilités).

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...	Tu penses à...
« sachant que », « étant donné que »	$P_B(A)$: probabilité conditionnelle
« test positif / négatif »	arbre + Bayes
« indépendamment »	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
« au moins un »	$1 - (1 - p)^n$ ou complémentaire
« sans remise »	épreuves dépendantes, conditionnelles
« en déduire la probabilité que »	probabilités totales
« montrer que A et B sont indépendants »	vérifier $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
« quelle est la probabilité d'être...sachant »	Bayes (inverser le conditionnement)
« sensibilité / spécificité »	test médical, arbre Bayes
« faux positif »	$P_{\overline{M}}(+)$: sain mais test positif

Attention | Top 6 des erreurs au bac

1. **Confondre** $P_B(A)$ et $P_A(B)$. C'est l'erreur la plus fréquente ! Vérifie toujours ce qui est « sachant » (en indice) et ce qui est « l'événement » (entre parenthèses).
2. **Oublier de vérifier que les branches somment à 1**. Chaque nœud de l'arbre doit sommer

à 1.

3. **Multiplier des probabilités non indépendantes.** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ n'est vrai que si $A \perp B$.
4. **Confondre incompatibilité et indépendance.** $A \cap B = \emptyset$ signifie dépendance maximale !
5. **Donner $P_M(+)$ (sensibilité) quand on demande $P_+(M)$ (valeur prédictive positive).**
6. **Ne pas simplifier les fractions.** Les résultats de Bayes donnent souvent des fractions ; simplifie-les.

Méthode | Récapitulatif complet des formules

Résultat	Formule
Probabilité conditionnelle	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplication	$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$
Probabilités totales	$P(A) = \sum P(B_i) P_{B_i}(A)$
Cas $\{B, \bar{B}\}$	$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$
Formule de Bayes	$P_A(B) = \frac{P(B) P_B(A)}{P(A)}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Au moins un succès	$P(\text{au moins } 1) = 1 - (1 - p)^n$
Complémentaire dans B	$P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$

5 Exercices

Exercice 1 — Probabilité conditionnelle directe

On lance un dé équilibré. $A = \{1, 2, 3\}$ (petit), $B = \{2, 4, 6\}$ (pair).

- a) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.
- b) Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
- c) A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 — Arbre simple

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire deux boules **sans remise**.

- a) Construire l'arbre pondéré.
- b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.
- c) Calculer la probabilité que la deuxième boule soit rouge.

Exercice 3 — Tableau à double entrée

Dans une classe de 35 élèves, 20 sont des filles, 15 des garçons. Parmi les filles, 12 aiment les maths. Parmi les garçons, 9 aiment les maths.

- a) Compléter le tableau à double entrée.
- b) Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard aime les maths.
- c) Calculer $P_F(M)$ et $P_M(F)$ (où F = fille, M = aime les maths).
- d) F et M sont-ils indépendants ?

Exercice 4 — Probabilités totales

Une usine a deux machines M_1 et M_2 . M_1 produit 60% des pièces, M_2 produit 40%. Le taux de défaut est 3% pour M_1 et 5% pour M_2 .

- a) Dessiner l'arbre pondéré.
- b) Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit défectueuse.
- c) Sachant qu'une pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_1 ?

Exercice 5 — Test médical et Bayes

Un test de dépistage a une sensibilité de 95% et une spécificité de 90%. La prévalence de la maladie est de 1%.

- a) Dessiner l'arbre pondéré complet.
- b) Calculer $P(+)$.
- c) Calculer $P_+(M)$ (valeur prédictive positive). Commenter.
- d) Calculer $P_-(\overline{M})$ (valeur prédictive négative).
- e) Si un patient positif fait un **deuxième test** (indépendant), calculer la probabilité d'être malade sachant que les **deux** tests sont positifs.

Exercice 6 — Indépendance

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. R = « rouge » (cœur ou carreau), F = « figure » (roi, dame, valet).

- a) Calculer $P(R)$, $P(F)$, $P(R \cap F)$.
- b) R et F sont-ils indépendants ?
- c) Soit A = « as ». R et A sont-ils indépendants ?

Exercice 7 ★★☆☆ — Succession d'épreuves

Un tireur atteint sa cible avec probabilité 0,8 à chaque tir (indépendamment).

- a) Calculer la probabilité d'atteindre la cible 5 fois de suite.
- b) Calculer la probabilité de rater au moins une fois en 5 tirs.
- c) Combien de tirs faut-il pour que $P(\text{au moins un raté}) \geq 0,95$?

Exercice 8 ★★☆☆ — Démonstrations de cours

- a) Démontrer la formule des probabilités totales.
- b) Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ aussi.
- c) Démontrer que $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.

Exercice 9 ★★☆☆ — Espérance conditionnelle

Un sac contient 3 boules rouges (valeur 10) et 2 boules bleues (valeur 5). On tire une boule. Si rouge, on relance un dé équilibré et on ajoute le résultat. Si bleue, on ne relance pas.

- a) Calculer l'espérance du gain sachant que la boule est rouge.
- b) Calculer l'espérance du gain sachant que la boule est bleue.
- c) En déduire l'espérance totale du gain.

Exercice 10 ★★☆☆ — Paradoxe de l'anniversaire

Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire ? (On suppose 365 jours équiprobables.)

- a) Calculer la probabilité que **toutes** les dates soient différentes : $P_n = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{365-n+1}{365}$.
- b) Calculer $P(\text{au moins une coïncidence}) = 1 - P_n$ pour $n = 23, 30, 50$.
- c) À partir de combien de personnes dépasse-t-on 50% ?

Exercice 11 ★★☆☆ — Le problème de Monty Hall

Un jeu télévisé : 3 portes, une cache une voiture, les deux autres des chèvres. Le joueur choisit une porte. Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une **autre** porte révélant une chèvre. Le joueur peut alors garder son choix ou changer.

- a) Définir les événements. Modéliser avec un arbre.
- b) Calculer la probabilité de gagner en **gardant** son choix.
- c) Calculer la probabilité de gagner en **changeant**.
- d) Faut-il changer ? Justifier par Bayes.

Exercice 12 ★★☆☆ — Filtrage anti-spam

Un filtre bayésien utilise la présence du mot « gratuit » pour détecter le spam. $P(\text{spam}) = 0,4$, $P_{\text{spam}}(\text{gratuit}) = 0,8$, $P_{\overline{\text{spam}}}(\text{gratuit}) = 0,1$.

- a) Calculer $P(\text{gratuit})$.
- b) Calculer $P_{\text{gratuit}}(\text{spam})$.
- c) Si on ajoute un deuxième mot-clé « urgent » ($P_{\text{spam}}(\text{urgent}) = 0,6$, $P_{\overline{\text{spam}}}(\text{urgent}) = 0,05$, indépendant de « gratuit » conditionnellement au spam), calculer la probabilité d'être spam sachant que les deux mots sont présents.

Exercice 13 ★★ — Chaîne de Markov simple

Un personnage se déplace entre deux états A et B . À chaque étape, s'il est en A , il reste en A avec probabilité 0,7 et va en B avec probabilité 0,3. S'il est en B , il reste en B avec probabilité 0,6 et va en A avec probabilité 0,4. Il commence en A .

- a) Calculer la probabilité d'être en A après 1, 2, 3 étapes.
- b) On note $a_n = P(\text{en } A \text{ à l'étape } n)$. Montrer que $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,4$.
- c) Résoudre cette récurrence (c'est une équation du type $u_{n+1} = au_n + b$!).
- d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Interpréter.

Exercice 14 ★★ — Probabilité conditionnelle en cascade

Trois urnes : U_1 contient 3R, 2B ; U_2 contient 1R, 4B ; U_3 contient 2R, 2B. On choisit une urne au hasard (équiprobablement), puis on tire une boule.

- a) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
- b) Sachant que la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?
- c) On tire une **deuxième boule** dans la **même urne** (sans remise). Sachant que la première est rouge, calculer la probabilité que la deuxième soit aussi rouge.

6 🦋 Problème — *Le problème du prisonnier* ★★ ★

🔥 Problème style prépa

Trois prisonniers A , B , C sont condamnés. Le gouverneur décide d'en gracier un, choisi au hasard (équiprobablement). Le prisonnier A demande au gardien de lui révéler le nom d'un des deux autres qui sera exécuté. Le gardien répond : « B sera exécuté. » Le prisonnier A pense alors que sa probabilité de grâce est passée de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$ (car il ne reste que lui et C). A-t-il raison ?

On note G_A , G_B , G_C les événements « A (resp. B , C) est gracié ». Le gardien annonce B : on note cet événement D_B .

Partie A — Modélisation

1. Écrire les probabilités *a priori* : $P(G_A)$, $P(G_B)$, $P(G_C)$.
2. Le gardien doit désigner un prisonnier **qui ne sera pas gracié** et **différent de A** . Déterminer $P_{G_A}(D_B)$, $P_{G_B}(D_B)$, $P_{G_C}(D_B)$.
Indication : si C est gracié, le gardien **doit** dire B . Si A est gracié, le gardien choisit entre B et C (on suppose équiprobablement). Si B est gracié, le gardien ne peut pas dire B .
3. Construire l'arbre pondéré complet.

Partie B — Calcul bayésien

4. Calculer $P(D_B)$ par les probabilités totales.
5. Par la formule de Bayes, calculer $P_{D_B}(G_A)$.
6. Calculer $P_{D_B}(G_C)$.
7. Le prisonnier A a-t-il raison de penser que sa probabilité de grâce a augmenté ?
8. Comparer avec le problème de Monty Hall. Expliquer l'analogie.

Partie C — Généralisation

9. Si le gardien choisit B avec probabilité q (au lieu de $\frac{1}{2}$) quand A est gracié, recalculer $P_{D_B}(G_A)$ en fonction de q .
10. Pour quelle valeur de q le prisonnier A a-t-il raison (i.e. $P_{D_B}(G_A) = \frac{1}{2}$) ?
11. Interpréter : pourquoi le résultat dépend-il de la **stratégie du gardien** ?

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

a) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $A \cap B = \{2\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

b) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

c) $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap B)$. A et B ne sont **pas indépendants**. Savoir que le nombre est pair change la probabilité d'avoir un petit nombre.

Exercice 2

a) Première branche : $P(R_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(B_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Si R_1 : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P_{R_1}(B_2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Si B_1 : $P_{B_1}(R_2) = \frac{4}{9}$, $P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{9}$.

b) $P(\text{même couleur}) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{15} + \frac{15}{45} = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$.

c) $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{15} + \frac{12}{45} = \frac{6}{45} + \frac{12}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$.

On retrouve $P(R_2) = \frac{2}{5} = P(R_1)$: la deuxième boule a la même probabilité que la première (propriété classique du tirage sans remise).

Exercice 3

a) Tableau :

	Fille (F)	Garçon ($\bar{F}$)	Total
Maths (M)	12	9	21
$\bar{M}$	8	6	14
Total	20	15	35

b) $P(M) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0,6$.

c) $P_F(M) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. $P_M(F) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \approx 0,571$.

d) $P(F) \times P(M) = \frac{20}{35} \times \frac{21}{35} = \frac{420}{1225} = \frac{12}{35} = P(F \cap M)$. Donc F et M sont **indépendants**. Cela se voit aussi par $P_F(M) = \frac{3}{5} = P(M)$.

Exercice 4

a) Branches de niveau 1 : $P(M_1) = 0,6$, $P(M_2) = 0,4$. Niveau 2 : $P_{M_1}(D) = 0,03$, $P_{M_2}(D) = 0,05$.

b) $P(D) = P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,05 = 0,018 + 0,020 = 0,038$.

c) $P_D(M_1) = \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,038} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Bien que M_1 produise plus de pièces, son taux de défaut est plus faible. La probabilité qu'une pièce défectueuse vienne de M_1 est légèrement inférieure à 50%.

Exercice 5

a) $P(M) = 0,01$, $P(\bar{M}) = 0,99$. $P_M(+)=0,95$, $P_M(-)=0,05$. $P_{\bar{M}}(-)=0,90$, $P_{\bar{M}}(+)=0,10$.

b) $P(+)=0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,10 = 0,0095 + 0,099 = 0,1085$.

$$c) P_+(M) = \frac{0,0095}{0,1085} \approx 0,0876 \approx 8,8\%.$$

Avec une prévalence de seulement 1%, un test positif ne donne que $\approx 9\%$ de chance d'être malade. C'est encore pire que l'exemple du cours (2% de prévalence) car ici la spécificité (90%) est plus faible.

$$d) P_-(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(-)}{P(-)} = \frac{0,99 \times 0,90}{1 - 0,1085} = \frac{0,891}{0,8915} \approx 0,9994 \approx 99,9\%.$$

Un test négatif est très rassurant : 99,9% de chance d'être sain.

e) Après le 1^{er} test positif, la probabilité *a priori* pour le 2^e test est $P'(M) = 0,0876$.

$$P'(+)=0,0876 \times 0,95 + (1 - 0,0876) \times 0,10 = 0,0832 + 0,0912 = 0,1744.$$

$$P'_+(M) = \frac{0,0832}{0,1744} \approx 0,477 \approx 48\%.$$

Deux tests positifs donnent environ 48% de chance d'être malade. C'est bien mieux qu'un seul test, mais toujours pas certain.

Exercice 6

$$a) P(R) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}. P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}. P(R \cap F) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

$$b) P(R) \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16} = P(R \cap F). \text{ Indépendants.}$$

$$c) P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}. P(R \cap A) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}. P(R) \times P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = P(R \cap A). \text{ Indépendants aussi.}$$

Exercice 7

$$a) P(5 \text{ succès}) = 0,8^5 = 0,32768 \approx 32,8\%.$$

$$b) P(\text{au moins un raté}) = 1 - 0,8^5 = 1 - 0,32768 \approx 67,2\%.$$

$$c) 1 - 0,8^n \geq 0,95 \iff 0,8^n \leq 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,8} = \frac{-2,996}{-0,2231} \approx 13,4. \text{ Donc } \boxed{n = 14} \text{ tirs.}$$

Exercice 8

a) Les B_i partitionnent Ω , donc $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ avec les $(A \cap B_i)$ disjoints.

$$P(A) = \sum P(A \cap B_i) = \sum P(B_i) \cdot P_{B_i}(A). \quad \square$$

$$b) P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \text{ (indépendance)}$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}). \text{ Donc } A \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants.} \quad \square$$

$$c) P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P_B(A). \quad \square$$

Exercice 9

$$a) \text{ Si rouge } (R) : \text{ gain} = 10 + D \text{ où } D \text{ est le résultat du dé. } E_R(\text{gain}) = 10 + E(D) = 10 + 3,5 = 13,5.$$

$$b) \text{ Si bleue } (B) : \text{ gain} = 5. E_B(\text{gain}) = 5.$$

$$c) \text{ Espérance totale : } E(\text{gain}) = P(R) \cdot E_R(\text{gain}) + P(B) \cdot E_B(\text{gain}) = \frac{3}{5} \times 13,5 + \frac{2}{5} \times 5 = 8,1 + 2 = 10,1.$$

Exercice 10

$$a) P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365-k}{365} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}.$$

$$b) P_{23} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times 343}{365^{23}} \approx 0,493. \text{ Donc } P(\text{coïncidence}) \approx 1 - 0,493 = 0,507 \approx 50,7\%.$$

$$P_{30} \approx 1 - 0,294 = 0,706 \approx 70,6\%. \quad P_{50} \approx 1 - 0,030 = 0,970 \approx 97\%.$$

c) Dès $n = 23$ personnes, la probabilité dépasse 50%. C'est le **paradoxe des anniversaires** : ce nombre est bien plus petit que l'intuition (≈ 183) car on compare toutes les **paires**, pas un individu au reste.

Exercice 11

a) $V_i =$ « la voiture est derrière la porte i » ($i = 1, 2, 3$). Le joueur choisit la porte 1. Le présentateur ouvre la porte 2 (chèvre). $D_2 =$ « le présentateur ouvre la porte 2 ».

b) En gardant : $P_{D_2}(V_1)$. Par Bayes :

$P(V_i) = \frac{1}{3}$ pour $i = 1, 2, 3$. $P_{V_1}(D_2) = \frac{1}{2}$ (le présentateur choisit entre 2 et 3). $P_{V_2}(D_2) = 0$ (il ne peut pas ouvrir la porte de la voiture). $P_{V_3}(D_2) = 1$ (il doit ouvrir la 2).

$$P(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$P_{D_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

c) En changeant (porte 3) : $P_{D_2}(V_3) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$

d) Il faut **changer** : la probabilité de gagner passe de $\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{3}$. L'information du présentateur ne change pas la probabilité du choix initial ($\frac{1}{3}$), mais concentre les $\frac{2}{3}$ restants sur une seule porte.

Exercice 12

a) $P(G) = P(\text{spam}) \cdot P_{\text{spam}}(G) + P(\overline{\text{spam}}) \cdot P_{\overline{\text{spam}}}(G) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,1 = 0,32 + 0,06 = 0,38.$

b) $P_G(\text{spam}) = \frac{0,4 \times 0,8}{0,38} = \frac{0,32}{0,38} = \frac{16}{19} \approx 84,2\%.$

c) Notons G et U les événements « gratuit » et « urgent ». Par indépendance conditionnelle :

$$P_{\text{spam}}(G \cap U) = P_{\text{spam}}(G) \cdot P_{\text{spam}}(U) = 0,8 \times 0,6 = 0,48.$$

$$P_{\overline{\text{spam}}}(G \cap U) = 0,1 \times 0,05 = 0,005.$$

$$P(G \cap U) = 0,4 \times 0,48 + 0,6 \times 0,005 = 0,192 + 0,003 = 0,195.$$

$$P_{G \cap U}(\text{spam}) = \frac{0,192}{0,195} = \frac{192}{195} = \frac{64}{65} \approx 98,5\%.$$

Avec deux mots-clés, la détection est quasi certaine.

Exercice 13

a) $a_0 = 1$ (il commence en A).

$$a_1 = P(\text{en A à l'étape 1}) = 0,7 \times 1 + 0,4 \times 0 = 0,7.$$

$$a_2 = 0,7 \times 0,7 + 0,4 \times 0,3 = 0,49 + 0,12 = 0,61.$$

$$a_3 = 0,7 \times 0,61 + 0,4 \times 0,39 = 0,427 + 0,156 = 0,583.$$

b) À l'étape $n+1$, on est en A soit en venant de A ($\times 0,7$), soit en venant de B ($\times 0,4$). $P(\text{en B}) = 1 - a_n$, donc :

$$a_{n+1} = 0,7 a_n + 0,4(1 - a_n) = 0,7 a_n + 0,4 - 0,4 a_n = 0,3 a_n + 0,4.$$

c) C'est une suite $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a = 0,3$ et $b = 0,4$. Le point fixe est $\ell = \frac{b}{1-a} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}.$

Posons $v_n = a_n - \frac{4}{7}$. Alors $v_{n+1} = 0,3 v_n$, d'où $v_n = v_0 \cdot 0,3^n = (1 - \frac{4}{7}) \cdot 0,3^n = \frac{3}{7} \cdot 0,3^n.$

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot 0,3^n.$$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{4}{7} \approx 0,571$. C'est la **probabilité stationnaire** d'être en A. Elle est supérieure à $\frac{1}{2}$ car A « retient » mieux ($0,7 > 0,6$).

Exercice 14

$$\text{a) } P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6+2+5}{10}.$$

$$\text{Calculons : } \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6+2+5}{10} = \frac{13}{10}.$$

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{10} = \frac{13}{30} \approx 0,433.$$

$$\text{b) } P_R(U_1) = \frac{P(U_1) \cdot P_{U_1}(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{1}{5} \times \frac{30}{13} = \frac{6}{13} \approx 0,462.$$

c) La probabilité de R_2 sachant R_1 dépend de l'urne choisie. Par l'espérance conditionnelle :

$$P(R_2|R_1) = P_R(U_1) \cdot P_{U_1}(R_2|R_1) + P_R(U_2) \cdot P_{U_2}(R_2|R_1) + P_R(U_3) \cdot P_{U_3}(R_2|R_1).$$

$$P_R(U_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{2}{13}. \quad P_R(U_3) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{13}{30}} = \frac{5}{13}.$$

Après avoir tiré 1 rouge (sans remise) :

$$U_1 : \text{reste } 2R/2B \text{ sur } 4, P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad U_2 : \text{reste } 0R/4B \text{ sur } 4, P = 0. \quad U_3 : \text{reste } 1R/2B \text{ sur } 3, P = \frac{1}{3}.$$

$$P(R_2|R_1) = \frac{6}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{13} \times 0 + \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{13} + 0 + \frac{5}{39} = \frac{9}{39} + \frac{5}{39} = \frac{14}{39} \approx 0,359.$$

Corrigé du problème — Le problème du prisonnier

Partie A — Modélisation

$$1. P(G_A) = P(G_B) = P(G_C) = \frac{1}{3}.$$

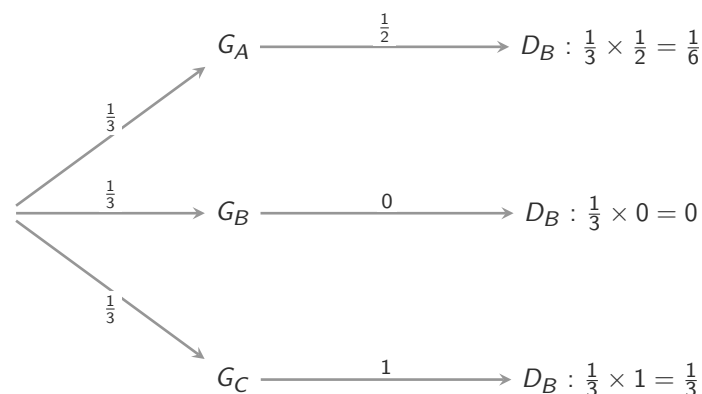
2. Le gardien désigne un condamné différent de A :

• Si A est gracié (G_A) : B et C sont condamnés. Le gardien peut dire B ou C, il choisit B avec probabilité $\frac{1}{2}$: $P_{G_A}(D_B) = \frac{1}{2}$.

• Si B est gracié (G_B) : le gardien ne peut pas dire B, il dit forcément C : $P_{G_B}(D_B) = 0$.

• Si C est gracié (G_C) : le gardien ne peut pas dire C (gracié) ni A (le demandeur). Il dit forcément B : $P_{G_C}(D_B) = 1$.

3. L'arbre :



Partie B — Calcul bayésien

$$4. P(D_B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$5. P_{D_B}(G_A) = \frac{P(G_A) \times P_{G_A}(D_B)}{P(D_B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$$6. P_{D_B}(G_C) = \frac{P(G_C) \times P_{G_C}(D_B)}{P(D_B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

7. Le prisonnier A a **tort**. Sa probabilité de grâce reste $\frac{1}{3}$, pas $\frac{1}{2}$. L'information du gardien ne change rien pour A, mais elle concentre les $\frac{2}{3}$ restants **entièrement sur C** (car on sait que B ne sera pas gracié).

8. C'est **exactement** le problème de Monty Hall : A est le joueur (porte 1), les prisonniers sont les portes, la grâce est la voiture, et le gardien est le présentateur. Comme à Monty Hall, le choix initial a $\frac{1}{3}$ de chance, et l'information donnée ne modifie pas ce $\frac{1}{3}$ mais concentre les $\frac{2}{3}$ sur l'alternative restante.

Partie C — Généralisation

9. Si $P_{G_A}(D_B) = q$ (au lieu de $\frac{1}{2}$) :

$$P(D_B) = \frac{1}{3} \cdot q + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{q+1}{3}.$$

$$P_{D_B}(G_A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot q}{\frac{q+1}{3}} = \frac{q}{q+1}.$$

$$10. P_{D_B}(G_A) = \frac{1}{2} \iff \frac{q}{q+1} = \frac{1}{2} \iff 2q = q+1 \iff q = 1.$$

Si $q = 1$, le gardien dit **toujours** B quand A est gracié, alors $P_{D_B}(G_A) = \frac{1}{2}$.

11. Le résultat dépend de la stratégie du gardien car l'information qu'il révèle dépend de ce qu'il **aurait pu** dire dans d'autres scénarios. Si le gardien dit toujours B (même quand A est gracié), alors « le gardien dit B » est moins informatif : cela arrive dans tous les cas sauf G_B . Si le gardien est équiprobable, le fait qu'il dise B privilégie le scénario où il était **forcé** de dire B (i.e. G_C). C'est le **problème de l'information sélective** : l'information dépend du processus qui l'a générée.

Fin de la fiche — Probabilités conditionnelles & Formule de Bayes

Tu maîtrises maintenant :

- La probabilité conditionnelle $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- La formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
 - L'indépendance et ses propriétés (complémentaire).
 - La construction et la lecture d'arbres pondérés.
- Les pièges classiques : faux positifs, erreur du procureur, Monty Hall.

Bayes : savoir mettre à jour ses croyances face à l'évidence.

→ Prochaine étape : Bernoulli & Loi binomiale.