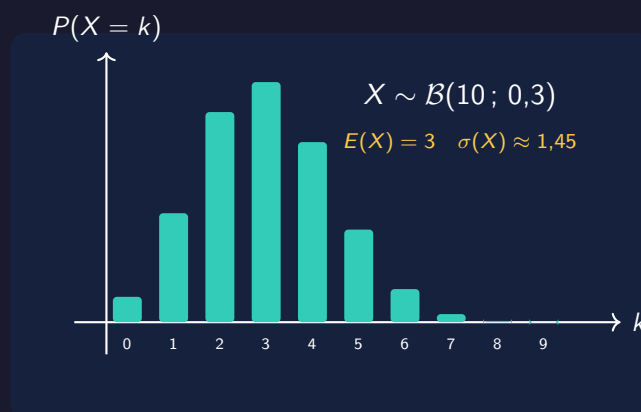


Schéma de Bernoulli & Loi binomiale

Épreuve de Bernoulli ▪ $\binom{n}{k}$ ▪ $\mathcal{B}(n, p)$ ▪ Espérance & variance



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier le schéma de Bernoulli et la loi binomiale ?	3
1.1	De quoi parle-t-on ?	3
1.2	Les applications concrètes	3
1.3	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Pile ou face : le modèle le plus simple	4
2.2	L'arbre : visualiser les chemins	4
2.3	Le coefficient binomial : combien de chemins ?	4
3	🎓 Le cours formel	5
3.1	Rappels : variable aléatoire, espérance, variance	5
3.2	Épreuve de Bernoulli	5
3.3	Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux	6
3.4	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	8
3.5	Espérance, variance, écart-type de $\mathcal{B}(n, p)$	8
3.6	Formule du binôme de Newton	9
3.7	Représentation graphique : diagramme en bâtons	10
3.8	Calcul de probabilités cumulées	10
3.9	Formules avec la calculatrice	11
3.10	La loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli	11
3.11	Probabilités conditionnelles et indépendance — rappels	11
3.12	Succession d'épreuves indépendantes : le cadre général	12
3.13	Mode de la loi binomiale	13
3.14	Inégalité de concentration (hors programme, pour la culture)	13
3.15	Simulation Python	14
4	🧰 Boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	✎ Exercices	17
6	🔑 Problème — Marche aléatoire et loi binomiale ★★	20
7	✅ Corrigés détaillés	21

1 ? Pourquoi étudier le schéma de Bernoulli et la loi binomiale ?

1.1 De quoi parle-t-on ?

Dans la vie courante et les sciences, on rencontre constamment des situations où une expérience aléatoire n'a que **deux issues** : succès ou échec, pile ou face, malade ou sain, conforme ou défectueux, vrai ou faux. Si on **répète** cette expérience n fois de manière **indépendante**, on obtient un **schéma de Bernoulli**. La question est alors : quelle est la probabilité d'obtenir exactement k succès sur n essais ? La réponse est donnée par la **loi binomiale**.

1.2 Les applications concrètes



Qualité
 n pièces testées
 k défectueuses ?



Sondages
 n personnes
 k favorables ?



Médecine
 n patients
 k guéris ?



Jeux
 n lancers
 k succès ?

Contrôle qualité : une usine produit des pièces dont 5% sont défectueuses. On prélève 20 pièces. Quelle probabilité qu'au plus 2 soient défectueuses ? C'est $P(X \leq 2)$ avec $X \sim \mathcal{B}(20; 0,05)$.

Sondage : on interroge 1000 personnes sur un candidat qui a 30% d'intentions de vote. Le nombre de réponses favorables suit une loi $\mathcal{B}(1000; 0,3)$.

Génétique : chaque enfant d'un couple porteur d'un gène récessif a une probabilité $\frac{1}{4}$ d'exprimer la maladie. Pour 4 enfants, le nombre de malades suit $\mathcal{B}(4; \frac{1}{4})$.

Fiabilité : un système contient 100 composants, chacun ayant 1% de chance de défaillance. Le nombre de pannes suit $\mathcal{B}(100; 0,01)$.

1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

On répète n fois une expérience à deux issues (succès avec probabilité p , échec avec probabilité $1 - p$) de manière **indépendante**. Le nombre de succès X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$. La probabilité d'obtenir exactement k succès fait intervenir les **coefficients binomiaux** $\binom{n}{k}$ (nombre de façons de placer k succès parmi n essais) et le **principe multiplicatif** (indépendance).

2 L'idée avant la formule

2.1 Pile ou face : le modèle le plus simple

Intuition | Comprendre sur un exemple

On lance une pièce équilibrée 3 fois. Les résultats possibles sont :

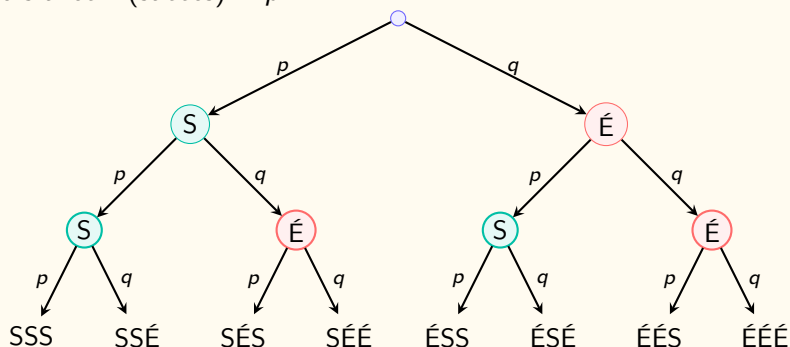
Résultat	Nb de Piles	Probabilité
FFF	0	$\frac{1}{8}$
PFF, FPF, FFP	1	$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
PPF, PFP, FPP	2	$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
PPP	3	$\frac{1}{8}$

Pourquoi 3 façons d'avoir exactement 1 Pile ? Parce qu'il y a $\binom{3}{1} = 3$ manières de **choisir** à quel lancer le Pile tombe. De même, $\binom{3}{2} = 3$ façons d'avoir 2 Piles. C'est le rôle du **coefficient binomial**.

2.2 L'arbre : visualiser les chemins

Intuition | L'arbre de probabilités

Pour $n = 3$ lancers avec $P(\text{succès}) = p$:



Chaque **chemin** de la racine à une feuille représente une suite de résultats. Un chemin avec k succès et $(n - k)$ échecs a la probabilité $p^k q^{n-k}$ (par indépendance, on multiplie). Il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins. D'où : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Notation : $q = 1 - p$ est la probabilité d'échec.

2.3 Le coefficient binomial : combien de chemins ?

Intuition | Le lien avec le dénombrement

$\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (sans ordre). C'est aussi le nombre de chemins dans l'arbre de Bernoulli qui contiennent exactement k succès.

Exemple : $\binom{4}{2} = 6$. Dans 4 lancers, il y a 6 positions possibles pour les 2 succès : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$.

La formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ se lit : « il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k succès, chacune avec la probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$ ».

3 Le cours formel

3.1 Rappels : variable aléatoire, espérance, variance

Définition | Variable aléatoire discrète

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité P . Une **variable aléatoire discrète** X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$: à chaque issue $\omega \in \Omega$, elle associe un nombre réel $X(\omega)$. L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. La **loi de probabilité** de X est la donnée de chaque valeur x_i et de la probabilité correspondante $P(X = x_i)$.

Définition | Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète de valeurs $x_1, \dots, x_r$.

Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i)$ (moyenne pondérée par les probabilités).

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^r (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (formule de König-Huygens).

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (mesure de la dispersion dans la même unité que X).

Propriété | Propriétés de l'espérance et de la variance

Pour X et Y variables aléatoires et $a, b \in \mathbb{R}$:

- **Linéarité de l'espérance** : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- **Variance** : $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (le $+b$ disparaît car un décalage ne change pas la dispersion).
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

3.2 Épreuve de Bernoulli

Définition | Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** :

- **Succès** (noté S) avec probabilité p ($0 \leq p \leq 1$)
- **Échec** (noté É) avec probabilité $q = 1 - p$

Définition | Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

La **variable de Bernoulli** X associée vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec :

x_i	$P(X = x_i)$
0	$1 - p$
1	p

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

✓ Propriété | Espérance et variance de $\mathcal{B}(p)$

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$:

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p) = pq$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq}$$

Démonstration | Calcul direct

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p.$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Exemple

On lance un dé équilibré. Succès = « obtenir un 6 ». Alors $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. $E(X) = \frac{1}{6} \approx 0,17$, $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,14$.

✓ Propriété | Maximum de la variance de Bernoulli

La variance $V(X) = p(1 - p)$ est maximale quand $p = \frac{1}{2}$ (incertitude maximale). On a alors $V(X) = \frac{1}{4}$.

En effet, $V(X) = p - p^2$ et $V'(p) = 1 - 2p = 0 \iff p = \frac{1}{2}$.

Graphiquement, $p \mapsto p(1 - p)$ est une parabole ouverte vers le bas, nulle en 0 et 1, maximale en $\frac{1}{2}$.

Exemple | Exemples de lois de Bernoulli dans la vie courante

- Lancer d'une pièce : $p = \frac{1}{2}$ (équilibrée).
- Naissance d'un garçon : $p \approx 0,512$ (légèrement plus de garçons).
- Tir au basket (joueur régulier) : $p \approx 0,45$ à $0,50$ (statistiques NBA).
- Pièce manufacturée défectueuse : $p \approx 0,01$ à $0,05$.
- Clic sur une publicité internet : $p \approx 0,02$ (taux de clic moyen).

3.3 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Définition | Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la **répétition** de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**, chacune de paramètre p .

Indépendance : le résultat de chaque épreuve ne dépend pas des résultats des épreuves précédentes.

⚠ Attention | Quand est-ce un schéma de Bernoulli ?

Il faut les **trois conditions** :

1. Chaque épreuve a **exactement deux issues** (succès / échec).
2. La probabilité de succès p est la **même** à chaque épreuve (épreuves identiques).
3. Les épreuves sont **indépendantes** (le résultat d'une épreuve n'influence pas les autres).

Contre-exemple : tirer 5 cartes **sans remise** dans un jeu de 32 cartes. Les tirages ne sont **pas** indépendants (la composition du paquet change). Ce n'est **pas** un schéma de Bernoulli. En revanche, tirer **avec remise** en est un.

📖 Définition | Coefficient binomial — rappel de la Fiche 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$:

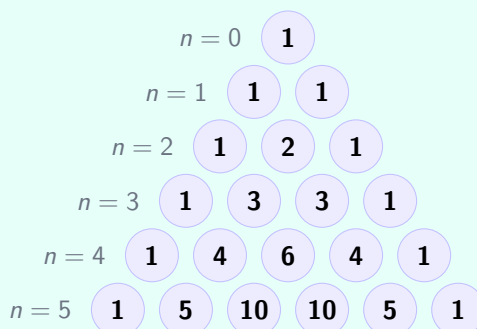
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

C'est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

✅ Propriété | Propriétés des coefficients binomiaux

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (une seule façon de ne rien choisir ou de tout choisir)
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- **Symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (choisir k éléments $\equiv$ choisir les $n - k$ restants)
- **Formule de Pascal** : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (relation de récurrence)
- **Somme** : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (nombre total de sous-ensembles)

✅ Propriété | Triangle de Pascal



Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (formule de Pascal).

3.4 Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition | Loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , on note X le **nombre de succès**. La variable X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
 X prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La formule se lit : $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nb de chemins}} \times \underbrace{p^k}_{k \text{ succès}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{n-k \text{ échecs}}.$

Cas particuliers :

- $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$: la loi de Bernoulli est un cas particulier.
- $P(X = 0) = (1-p)^n$: probabilité de n échecs consécutifs.
- $P(X = n) = p^n$: probabilité de n succès consécutifs.

Démonstration | Justification

Un chemin avec k succès et $(n-k)$ échecs a la probabilité $\underbrace{p \times \dots \times p}_k \times \underbrace{(1-p) \times \dots \times (1-p)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$ (par **indépendance**).
 Le nombre de tels chemins est $\binom{n}{k}$ (nombre de façons de choisir les k positions des succès parmi n).
 Ces chemins sont **incompatibles** (un seul se réalise), donc on additionne :
 $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k (1-p)^{n-k}.$

Propriété | Vérification : somme des probabilités

$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$ (formule du binôme de Newton).

3.5 Espérance, variance, écart-type de $\mathcal{B}(n, p)$

Théorème | Espérance et variance de la loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $q = 1 - p$:

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Démonstration | Par décomposition en somme de Bernoulli — exigible

On écrit $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ est le résultat de la i -ème épreuve.
 Les X_i sont **indépendantes** et de même loi.

Par **linéarité** de l'espérance : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$.

Par **indépendance** : $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = npq$.

Intuition | Interprétation

$E(X) = np$: en moyenne, sur n essais, on a np succès. C'est le **centre** de la distribution.

$\sigma(X) = \sqrt{npq}$: la dispersion croît comme $\sqrt{n}$ (pas comme n). Les valeurs de X se concentrent autour de np dans un intervalle de largeur $\approx 2\sigma = 2\sqrt{npq}$.

Exemple : $n = 100$, $p = 0,5$. $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 5$. On attend entre 40 et 60 Piles.

Exemple | Calculs classiques

1. $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$. $E(X) = 3$, $V(X) = 10 \times 0,3 \times 0,7 = 2,1$, $\sigma(X) = \sqrt{2,1} \approx 1,45$.
2. $X \sim \mathcal{B}(20; 0,5)$. $E(X) = 10$, $\sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2,24$.
3. $X \sim \mathcal{B}(100; 0,05)$. $E(X) = 5$, $\sigma(X) = \sqrt{4,75} \approx 2,18$.

3.6 Formule du binôme de Newton

Théorème | Formule du binôme de Newton

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

 Démonstration | Par récurrence — exigible

Initialisation : $n = 0$: $(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$. OK.

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n . Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

En regroupant le terme $k = 0$ du deuxième, le terme $j = n + 1$ du premier, et les termes communs :

$$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

Par Pascal : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Avec $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

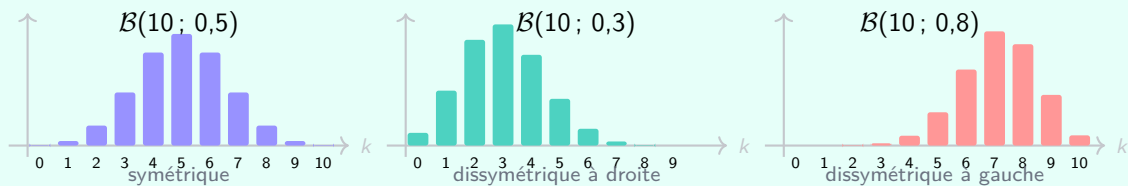
💡 Exemple | Applications utiles

1. $a = 1, b = 1 : 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
2. $a = 1, b = -1 : 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, i.e. la somme alternée des $\binom{n}{k}$ est nulle.
3. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + x^n$.

3.7 Représentation graphique : diagramme en bâtons

✅ Propriété | Allure de la loi binomiale

Le diagramme en bâtons de $B(n, p)$ a une **forme en cloche** (plus ou moins symétrique selon p) :



$p = 0,5$: la distribution est **symétrique** autour de np . $p < 0,5$: la distribution est étalée à droite.
 $p > 0,5$: étalée à gauche.

3.8 Calcul de probabilités cumulées

🔧 Méthode | Calculer $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$, $P(a \leq X \leq b)$

- $P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ (fonction de répartition, à la calculatrice : `binomFdR` ou `binomcdf`).
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ (complémentaire, **attention au $k-1$**).
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$ (au moins un succès).
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$.

⚠ Attention | L'erreur classique : $P(X \geq k) \neq 1 - P(X \leq k)$

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$, pas $1 - P(X \leq k)$! En effet, $P(X \leq k)$ **contient** le terme $P(X = k)$. Si on écrit $1 - P(X \leq k)$, on obtient $P(X \geq k+1) = P(X > k)$.

Règle : pour le « au moins », retrancher ce qui est « strictement en dessous ».

💡 Exemple | Calculs détaillés avec $X \sim B(5; 0,4)$

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= \binom{5}{0} (0,4)^0 (0,6)^5 = 0,6^5 = 0,07776. \\
 P(X = 1) &= \binom{5}{1} (0,4)^1 (0,6)^4 = 5 \times 0,4 \times 0,1296 = 0,2592. \\
 P(X = 2) &= \binom{5}{2} (0,4)^2 (0,6)^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456. \\
 P(X \leq 2) &= 0,07776 + 0,2592 + 0,3456 = 0,68256. \\
 P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,68256 = 0,31744. \\
 P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 1 - 0,07776 = 0,92224.
 \end{aligned}$$

3.9 Formules avec la calculatrice

✂ Méthode | Utiliser la calculatrice

Ce qu'on cherche	TI	Casio
$P(X = k)$	<code>binomFdp(n,p,k)</code>	<code>BinomialPD(k,n,p)</code>
$P(X \leq k)$	<code>binomFdr(n,p,k)</code>	<code>BinomialCD(k,n,p)</code>
$\binom{n}{k}$	<code>n nCr k</code>	<code>nCr(n,k)</code>

3.10 La loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli

★ Théorème | Décomposition fondamentale

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires **indépendantes**, chacune de loi $\mathcal{B}(p)$, alors :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Réciproquement, toute variable suivant $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

✓ Propriété | Somme de binomiales indépendantes

Si $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ sont **indépendantes** et de **même paramètre** p , alors :

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

💡 Exemple

On réalise 30 lancers le matin ($X \sim \mathcal{B}(30; 0,5)$) et 20 lancers l'après-midi ($Y \sim \mathcal{B}(20; 0,5)$). Le total de Piles $X + Y \sim \mathcal{B}(50; 0,5)$.

3.11 Probabilités conditionnelles et indépendance — rappels

📖 Définition | Probabilité conditionnelle

La probabilité de A sachant B (avec $P(B) > 0$) est :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

📖 Définition | Indépendance de deux événements

A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Équivalences (si $P(B) > 0$) : $P(A|B) = P(A)$, i.e. savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A .

✓ Propriété | Formule des probabilités totales

Si $B_1, B_2, \dots, B_m$ forment une **partition** de Ω (i.e. B_i deux à deux incompatibles et $\bigcup B_i = \Omega$) avec $P(B_i) > 0$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(B_i) P(A|B_i)$$

✓ Propriété | Formule de Bayes

Dans le même contexte, pour tout j :

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^m P(B_i) P(A|B_i)} = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{P(A)}$$

Interprétation : connaissant le résultat A (le test est positif), on « inverse » l'arbre pour remonter à la cause B_j (le patient est malade). Bayes permet de passer des causes aux effets.

⚠ Attention | Le paradoxe du test : quand Bayes surprend

Même avec un test très fiable (sensibilité 99%, spécificité 95%), si la maladie est rare (2%), la valeur prédictive positive $P(M|T+)$ peut être faible (ici $\approx 29\%$). C'est le **paradoxe des faux positifs** : quand la maladie est rare, la plupart des positifs sont des faux positifs. Ce résultat contre-intuitif est fondamental en médecine et en justice.

💡 Exemple | Application : succession d'épreuves

Un sac contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire avec remise 2 boules.

$$P(2 \text{ rouges}) = P(R_1) \times P(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \text{ (indépendance).}$$

$$P(\text{exactement 1 rouge}) = \binom{2}{1} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$

Le nombre de rouges $X \sim \mathcal{B}(2; \frac{3}{5})$.

3.12 Succession d'épreuves indépendantes : le cadre général

📖 Définition | Succession d'épreuves indépendantes

On répète n fois une expérience aléatoire. Les épreuves sont **indépendantes** si la probabilité de tout événement défini sur une épreuve ne dépend pas des résultats des autres épreuves.

La probabilité d'un **chemin** dans l'arbre est le **produit** des probabilités le long des branches.

⚠ Attention | Schéma de Bernoulli $\neq$ succession d'épreuves indépendantes

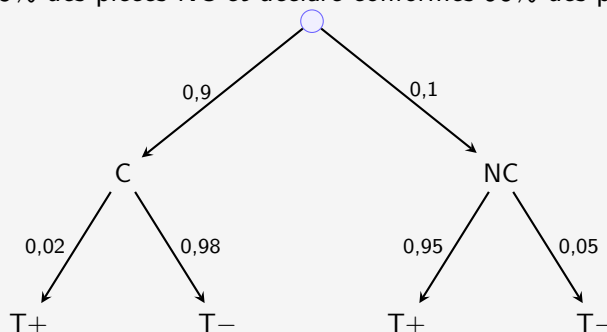
Le schéma de Bernoulli est un **cas particulier** de succession d'épreuves indépendantes où chaque épreuve est une épreuve de Bernoulli (deux issues, même probabilité).

On peut avoir des épreuves indépendantes qui ne sont **pas** des épreuves de Bernoulli. Par exemple : lancer 3 dés indépendants où chaque dé a 6 faces. C'est une succession d'épreuves indépendantes

mais **pas** un schéma de Bernoulli (plus de 2 issues par épreuve).

💡 Exemple | Problème type bac : arbre à 2 niveaux

Une machine produit des pièces : 90% conformes (C) et 10% non conformes (NC). On teste chaque pièce. Le test détecte 95% des pièces NC et déclare conformes 98% des pièces C.



$$P(T+) = 0,9 \times 0,02 + 0,1 \times 0,95 = 0,018 + 0,095 = 0,113 \text{ (probabilités totales).}$$

$$P(NC|T+) = \frac{0,095}{0,113} \approx 0,841 \text{ (formule de Bayes).}$$

3.13 Mode de la loi binomiale

✓ Propriété | Le mode : valeur la plus probable

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, le **mode** est la valeur k^* qui maximise $P(X = k)$.

En posant $r = (n + 1)p$:

- Si r n'est pas entier : le mode est unique, $k^* = \lfloor r \rfloor = \lfloor (n + 1)p \rfloor$.
- Si r est entier : deux modes $k^* = r - 1$ et $k^* = r$.

En pratique, le mode est très proche de l'espérance np (écart < 1).

💡 Exemple

$$\mathcal{B}(10; 0,5) : r = 11 \times 0,5 = 5,5, \text{ non entier. Mode} = \lfloor 5,5 \rfloor = 5.$$

$$\mathcal{B}(20; 0,3) : r = 21 \times 0,3 = 6,3, \text{ non entier. Mode} = 6.$$

$$\mathcal{B}(9; 0,5) : r = 10 \times 0,5 = 5, \text{ entier. Deux modes : 4 et 5.}$$

3.14 Inégalité de concentration (hors programme, pour la culture)

✓ Propriété | Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2 , et pour tout $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Autrement dit, la probabilité que X s'écarte de plus de δ de sa moyenne est au plus $\frac{\sigma^2}{\delta^2}$.

💡 Exemple | Application à la loi binomiale

$X \sim \mathcal{B}(100; 0,5)$. $E(X) = 50$, $V(X) = 25$.

$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = 0,25$. La probabilité d'avoir moins de 40 ou plus de 60 Piles est au plus 25%.

En réalité, $P(|X - 50| \geq 10) \approx 0,046$ (calcul exact), bien meilleur que la borne. L'inégalité est grossière mais universelle.

3.15 Simulation Python

🔧 Méthode | Simuler une loi binomiale en Python 📄

```
import random

def bernoulli(p):
    """Simule une épreuve de Bernoulli."""
    return 1 if random.random() < p else 0

def binomiale(n, p):
    """Simule  $X \sim B(n, p)$ ."""
    return sum(bernoulli(p) for _ in range(n))

# Exemple : estimer  $P(X \geq 3)$  pour  $X \sim B(10, 0.3)$ 
N = 100000 # nombre de simulations
compteur = sum(1 for _ in range(N) if binomiale(10, 0.3) >= 3)
print(f"P(X >= 3) {compteur / N:.4f}")

# Avec numpy (plus rapide) :
import numpy as np
X = np.random.binomial(10, 0.3, size=100000)
print(f"P(X >= 3) {np.mean(X >= 3):.4f}")
print(f"Moyenne = {np.mean(X):.2f}, Écart-type = {np.std(X):.2f}")
La fréquence observée converge vers la probabilité théorique quand  $N \rightarrow +\infty$  (loi des grands nombres, Fiche 16).
```

🔧 Méthode | Tracer le diagramme en bâtons en Python

```
from math import comb
import matplotlib.pyplot as plt

n, p = 10, 0.3
k_vals = range(n + 1)
probs = [comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k) for k in k_vals]

plt.bar(k_vals, probs, color='steelblue', edgecolor='black')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('P(X = k)')
plt.title(f'Loi binomiale B({n}, {p})')
plt.show()
```

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les 10 réflexes essentiels

1. **Reconnaître un schéma de Bernoulli** : 2 issues, même p , indépendance.
2. **Identifier n et p** : n = nombre de répétitions, p = probabilité de succès.
3. **Nommer la variable** : X = nombre de succès, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
4. **Calculer $P(X = k)$** : $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ou calculatrice.
5. **Au moins un** : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$.
6. **Au plus k** : $P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k P(X = j)$ (cumulé).
7. **Au moins k** : $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ (attention $k-1$).
8. **Espérance/variance** : $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
9. **Interpréter $E(X)$** : « en moyenne, on attend np succès ».
10. **Utiliser la calculatrice** : binomFdp pour $P(X = k)$, binomFdr pour $P(X \leq k)$.

Méthode | Mots-clés à repérer dans les énoncés

Tu lis dans l'énoncé. . .	Tu penses à. . .
« on répète n fois »	schéma de Bernoulli, loi $\mathcal{B}(n, p)$
« de manière indépendante »	confirmation de l'indépendance
« probabilité de succès »	c'est le p
« au moins un »	$1 - (1-p)^n$
« en moyenne », « on s'attend à »	espérance $E(X) = np$
« nombre de succès »	$X \sim \mathcal{B}(n, p)$
« avec remise »	indépendance assurée
« sans remise »	pas un schéma de Bernoulli
« sachant que »	probabilité conditionnelle
« arbre de probabilités »	dessiner l'arbre, multiplier le long des branches

Attention | Top 6 des erreurs au bac

1. **Confondre $P(X \geq k)$ et $1 - P(X \leq k)$** . C'est $1 - P(X \leq k-1)$! Penser au dessin.
2. **Oublier le coefficient binomial**. $P(X = k) \neq p^k (1-p)^{n-k}$. Il faut le $\binom{n}{k}$ devant.
3. **Appliquer la loi binomiale sans remise**. Tirer **sans remise** n'est pas indépendant.
4. **Confondre $E(X)$ et mode**. L'espérance np n'est pas forcément un entier, ni la valeur la plus probable.

5. Calculer $\binom{n}{k}$ avec les mauvaises valeurs. Vérifie que $k \leq n$ et que k est entier.
6. Ne pas vérifier la cohérence. Si $P(X = k) > 1$ ou $\sum P \neq 1$, il y a une erreur de calcul.

🔧 Méthode | Récapitulatif complet des formules

Résultat	Formule
Coefficient binomial	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Symétrie	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Pascal	$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
Loi binomiale	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance	$E(X) = np$
Variance	$V(X) = np(1-p)$
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$
Binôme de Newton	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Au moins 1 succès	$P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$
Prob. conditionnelle	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Prob. totales	$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A B_i)$

5 Exercices

Exercice 1 — Reconnaître un schéma de Bernoulli

Pour chaque situation, dire si c'est un schéma de Bernoulli. Si oui, préciser n et p .

- On lance 10 fois un dé équilibré. Succès = « obtenir un 6 ».
- On tire 5 cartes **sans remise** dans un jeu de 52. Succès = « tirer un as ».
- On lance 20 fois une pièce truquée ($P(\text{Pile}) = 0,6$). Succès = « Pile ».
- On interroge 100 personnes, chacune ayant une probabilité 0,3 de répondre oui (indépendamment). Succès = « oui ».
- Un joueur lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Succès = « obtenir un 6 ».
- On tire 8 boules **avec remise** dans une urne contenant 3 rouges et 7 bleues.

Exercice 2 — Coefficients binomiaux

Calculer :

- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| a) $\binom{5}{2}$ | d) $\binom{7}{7}$ | g) $\binom{100}{1}$ |
| b) $\binom{8}{3}$ | e) $\binom{6}{4}$ | h) $\binom{20}{18}$ |
| c) $\binom{10}{0}$ | f) $\binom{12}{2}$ | |

Exercice 3 — Calculs de probabilités binomiales

$X \sim \mathcal{B}(8; 0,3)$. Calculer :

- | | |
|---------------|-------------------------|
| a) $P(X = 0)$ | d) $P(X \leq 1)$ |
| b) $P(X = 2)$ | e) $P(X \geq 1)$ |
| c) $P(X = 8)$ | f) $P(2 \leq X \leq 5)$ |

Exercice 4 — Espérance et variance

Pour chaque loi, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

- $X \sim \mathcal{B}(20; 0,5)$
- $X \sim \mathcal{B}(100; 0,1)$
- $X \sim \mathcal{B}(50; 0,04)$
- $X \sim \mathcal{B}(36; \frac{1}{6})$

Exercice 5 — Contrôle qualité

Une usine fabrique des composants dont 3% sont défectueux. On prélève 20 composants au hasard (on suppose le lot assez grand pour modéliser par un tirage avec remise).

- Justifier que X , le nombre de défectueux, suit $\mathcal{B}(20; 0,03)$.
- Calculer $P(X = 0)$: probabilité qu'aucun ne soit défectueux.
- Calculer $P(X \leq 1)$.
- Calculer $P(X \geq 2)$.
- Le lot est refusé si $X \geq 3$. Quelle est la probabilité de refus ?

Exercice 6 — Au moins un succès

- On lance 10 dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
- On répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,1$. Déterminer le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,95$.
- Généraliser : montrer que le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq \alpha$ est $n = \left\lceil \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)} \right\rceil$.

Exercice 7 ★★☆☆ — **Triangle de Pascal et binôme**

- Construire les lignes $n = 0$ à $n = 7$ du triangle de Pascal.
- Vérifier que la somme de chaque ligne est 2^n .
- Développer $(1 + x)^5$ avec la formule du binôme.
- Développer $(2a - b)^4$.

Exercice 8 ★★☆☆ — **Loi de probabilité complète**

Soit $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$.

- Dresser le tableau complet de la loi de X .
- Vérifier que $\sum_{k=0}^4 P(X = k) = 1$.
- Retrouver $E(X)$ par le calcul direct $\sum k P(X = k)$.
- Retrouver $V(X)$ par la formule de König-Huygens.
- Tracer le diagramme en bâtons.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Arbre et probabilités conditionnelles**

Un test de dépistage a les caractéristiques suivantes : sensibilité $P(T+|M) = 0,99$ et spécificité $P(T-|\overline{M}) = 0,95$. La maladie touche 2% de la population.

- Dessiner l'arbre pondéré.
- Calculer $P(T+)$ (probabilités totales).
- Calculer $P(M|T+)$: valeur prédictive positive (Bayes).
- On teste 500 personnes. Le nombre de tests positifs suit-il une loi binomiale ? Si oui, laquelle ?
- Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de tests positifs.

Exercice 10 ★★☆☆ — **Génétique**

Le daltonisme touche environ 8% des garçons. Dans une classe de 30 garçons :

- Modéliser le nombre de daltoniens X .
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- Calculer $P(X = 0)$ (aucun daltonien).
- Calculer $P(X \geq 5)$ (au moins 5 daltoniens).
- Déterminer la valeur la plus probable de X (le **mode**).

Exercice 11 ★★☆☆ — **Démonstrations de cours**

- Démontrer que $E(X) = np$ et $V(X) = npq$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (décomposition en Bernoulli).
- Démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.
- Démontrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geq 1$.

Exercice 12 ★★☆☆ — **Jeu de hasard**

Un joueur lance 5 pièces équilibrées. Il gagne 10€ par Pile obtenu et perd 15€ par Face.

- Exprimer le gain G en fonction de $X =$ nombre de Piles.
- Déterminer la loi de X .
- Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
- Calculer $\sigma(G)$.

Exercice 13 ★★ ★ — Étude de la fonction $k \mapsto P(X = k)$

On pose $f(k) = P(X = k)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- a) Calculer le quotient $\frac{f(k+1)}{f(k)}$ en fonction de n , k et p .
- b) En déduire que f est croissante tant que $k < (n+1)p - 1$ et décroissante après.
- c) Déterminer le **mode** (valeur la plus probable) pour $\mathcal{B}(20; 0,3)$.
- d) Déterminer le mode pour $\mathcal{B}(10; 0,5)$.

Exercice 14 ★★ ★ — Seuil et risque

Un fabricant affirme que 95% de ses pièces sont conformes. Un client prélève 50 pièces.

- a) Modéliser X , le nombre de pièces défectueuses, si l'affirmation est vraie.
- b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- c) Le client décide de refuser le lot si $X \geq 5$. Calculer la probabilité de refus (risque du fournisseur).
- d) En réalité, le taux de défauts est de 10%. Calculer la probabilité d'accepter le lot à tort (risque du client).
- e) **(Bonus)** Déterminer le seuil s (nombre maximal de défauts tolérés) tel que le risque fournisseur soit inférieur à 5%.

6 🐼 Problème — Marche aléatoire et loi binomiale ★★

🔥 Problème style prépa

Une particule se déplace sur l'axe des entiers. À chaque étape, elle avance de $+1$ avec probabilité p ou recule de -1 avec probabilité $q = 1 - p$, indépendamment. Elle part de l'origine.

On note S_n la position de la particule après n étapes, avec $S_0 = 0$.

Partie A — Lien avec la loi binomiale

1. On note X_i le déplacement à l'étape i ($+1$ ou -1). Montrer que $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
2. On pose $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$. Montrer que $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$.
3. En notant $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ le nombre de pas vers la droite, montrer que $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ et que $S_n = 2Y - n$.
4. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
5. Déterminer les valeurs possibles de S_n . Montrer que S_n a la même parité que n .
6. Calculer $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$ pour $n = 100$ et $p = 0,5$. Interpréter.

Partie B — Cas symétrique $p = \frac{1}{2}$

7. Montrer que $E(S_n) = 0$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$. Interpréter : où se trouve typiquement la particule après n pas ?
8. Calculer $P(S_n = 0)$ pour n pair. Exprimer cette probabilité avec un coefficient binomial.
9. Application : calculer $P(S_4 = 0)$, $P(S_{10} = 0)$ et $P(S_{100} = 0)$. Commenter l'évolution.
10. Montrer que $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ et utiliser la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour montrer que $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie C — Retour à l'origine

11. On note R_n l'événement « la particule est revenue à l'origine au moins une fois avant ou à l'étape n ». Montrer que $P(R_2) = P(S_2 = 0) = 2pq$.
12. (Bonus) On admet que la probabilité de **ne jamais revenir** à l'origine (en $p = \frac{1}{2}$) est 0. Autrement dit, la marche aléatoire symétrique revient à l'origine avec probabilité 1 : c'est le théorème de **ré-currence** de Pólya. Interpréter ce résultat : est-il étonnant ? Combien de temps faut-il attendre en moyenne ?

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

- a) Oui : chaque lancer a 2 issues (6 ou non-6), même $p = \frac{1}{6}$, lancers indépendants. $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$.
- b) Non : tirage sans remise $\Rightarrow$ les épreuves ne sont pas indépendantes (la composition du jeu change).
- c) Oui : 2 issues (P/F), même $p = 0,6$, lancers indépendants. $n = 20$, $p = 0,6$.
- d) Oui : 2 issues (oui/non), même $p = 0,3$, réponses indépendantes. $n = 100$, $p = 0,3$.
- e) Non : le nombre de lancers n'est pas fixé à l'avance. Ce n'est pas un schéma de Bernoulli (c'est une loi géométrique).
- f) Oui : avec remise $\Rightarrow$ indépendance, 2 issues (rouge/bleue), $p = \frac{3}{10}$. $n = 8$, $p = 0,3$.

Exercice 2

- a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$. b) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$.
- c) $\binom{10}{0} = 1$. d) $\binom{7}{7} = 1$. e) $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$. f) $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$.
- g) $\binom{100}{1} = 100$. h) $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$.

Exercice 3

$X \sim \mathcal{B}(8; 0,3)$. On note $q = 0,7$.

- a) $P(X = 0) = \binom{8}{0}(0,3)^0(0,7)^8 = 0,7^8 \approx 0,0576$.
- b) $P(X = 2) = \binom{8}{2}(0,3)^2(0,7)^6 = 28 \times 0,09 \times 0,117649 \approx 0,2965$.
- c) $P(X = 8) = (0,3)^8 \approx 0,00007$.
- d) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0576 + \binom{8}{1}(0,3)^1(0,7)^7 = 0,0576 + 8 \times 0,3 \times 0,0824 \approx 0,0576 + 0,1977 \approx 0,2553$.
- e) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0576 \approx 0,9424$.
- f) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \approx 0,9887 - 0,2553 \approx 0,7334$.

Exercice 4

- a) $E = 20 \times 0,5 = 10$. $V = 20 \times 0,5 \times 0,5 = 5$. $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$.
- b) $E = 100 \times 0,1 = 10$. $V = 100 \times 0,1 \times 0,9 = 9$. $\sigma = 3$.
- c) $E = 50 \times 0,04 = 2$. $V = 50 \times 0,04 \times 0,96 = 1,92$. $\sigma \approx 1,39$.
- d) $E = 36 \times \frac{1}{6} = 6$. $V = 36 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 5$. $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$.

Exercice 5

- a) Chaque composant est défectueux (S) ou non (É), indépendamment, avec $p = 0,03$. $n = 20$ prélèvements. $X \sim \mathcal{B}(20; 0,03)$.
- b) $P(X = 0) = 0,97^{20} \approx 0,5438$.
- c) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,5438 + \binom{20}{1}(0,03)(0,97)^{19} \approx 0,5438 + 20 \times 0,03 \times 0,5607 \approx 0,5438 + 0,3364 \approx 0,8802$.
- d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,8802 \approx 0,1198$.

e) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$. $P(X = 2) = \binom{20}{2}(0,03)^2(0,97)^{18} = 190 \times 0,0009 \times 0,5780 \approx 0,0988$.
 $P(X \leq 2) \approx 0,8802 + 0,0988 \approx 0,9790$. $P(X \geq 3) \approx 0,021 \approx 2,1\%$.

Exercice 6

a) $X \sim \mathcal{B}(10; \frac{1}{6})$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (\frac{5}{6})^{10} \approx 1 - 0,1615 \approx 0,8385$.

b) $P(X \geq 1) \geq 0,95 \iff 1 - (0,9)^n \geq 0,95 \iff (0,9)^n \leq 0,05 \iff n \ln(0,9) \leq \ln(0,05) \iff n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9)} \approx \frac{-2,996}{-0,1054} \approx 28,4$.

$n = 29$ (au minimum).

c) $P(X \geq 1) \geq \alpha \iff (1 - p)^n \leq 1 - \alpha \iff n \geq \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}$. D'où $n_{\min} = \left\lceil \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)} \right\rceil$.

Exercice 7

a) Lignes 0 à 7 : 1 ; 1 1 ; 1 2 1 ; 1 3 3 1 ; 1 4 6 4 1 ; 1 5 10 10 5 1 ; 1 6 15 20 15 6 1 ; 1 7 21 35 35 21 7 1.

b) Sommes : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 = $2^0, \dots, 2^7$. Chaque somme est 2^n .

c) $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$.

d) $(2a - b)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (2a)^k (-b)^{4-k} = b^4 - 4(2a)b^3 + 6(4a^2)b^2 - 4(8a^3)b + 16a^4$
 $= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$.

Exercice 8

$X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$.

a) Calcul : $P(X = k) = \binom{4}{k} (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \binom{4}{k}$.

$\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$.

Tableau complet :

k	0	1	2	3	4
$\binom{4}{k}$	1	4	6	4	1
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
Décimal	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

b) $\frac{1+4+6+4+1}{16} = \frac{16}{16} = 1$. OK.

c) $E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{0+4+12+12+4}{16} = \frac{32}{16} = 2 = np$.

d) $E(X^2) = 0 + \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = \frac{80}{16} = 5$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5 - 4 = 1 = np(1 - p) = 4 \times 0,5 \times 0,5$. OK.

e) Diagramme en bâtons symétrique centré sur $k = 2$ (forme en cloche parfaite car $p = 0,5$).

Exercice 9

a) Arbre : première branche M (0,02) / $\bar{M}$ (0,98). Depuis M : T+ (0,99) / T- (0,01). Depuis $\bar{M}$: T+ (0,05) / T- (0,95).

b) $P(T+) = P(M) \times P(T+|M) + P(\overline{M}) \times P(T+|\overline{M}) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,05 = 0,0198 + 0,049 = 0,0688$.

c) $P(M|T+) = \frac{P(M \cap T+)}{P(T+)} = \frac{0,0198}{0,0688} \approx 0,288 \approx 28,8\%$.

Même avec un bon test, seulement 29% des positifs sont malades (car la maladie est rare : paradoxe du test).

d) Oui : chaque personne est testée indépendamment, $T+$ avec probabilité $P(T+) = 0,0688$. Le nombre de $T+$ suit $\mathcal{B}(500; 0,0688)$.

e) $E = 500 \times 0,0688 = 34,4$. $\sigma = \sqrt{500 \times 0,0688 \times 0,9312} = \sqrt{32,1} \approx 5,66$.

Exercice 10

a) Chaque garçon est daltonien (S) ou non ($\overline{S}$), indépendamment, avec $p = 0,08$. $X \sim \mathcal{B}(30; 0,08)$.

b) $E(X) = 30 \times 0,08 = 2,4$. $\sigma(X) = \sqrt{30 \times 0,08 \times 0,92} = \sqrt{2,208} \approx 1,49$.

c) $P(X = 0) = 0,92^{30} \approx 0,0820$.

d) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$. Calculons avec la calculatrice : $P(X \leq 4) \approx 0,9565$. $P(X \geq 5) \approx 0,0435 \approx 4,4\%$.

e) Le mode est la valeur k qui maximise $P(X = k)$. Par la formule du quotient (exercice 13), $\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$. Croissant si $k < (n+1)p - 1 = (31)(0,08) - 1 = 1,48$. Donc f croît pour $k \leq 1$ et décroît à partir de $k = 2$. Mode = $\boxed{2}$.

Exercice 11

a) $X = X_1 + \dots + X_n$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes. $E(X_i) = p$, $V(X_i) = pq$.

$E(X) = \sum E(X_i) = np$ (linéarité). $V(X) = \sum V(X_i) = npq$ (indépendance).

b) Voir la démonstration de la section 3.6.

c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = (1 + (-1))^n = 0^n = 0$ pour $n \geq 1$.

Exercice 12

a) Le joueur gagne $10X$ (pour les Piles) et perd $15(5 - X)$ (pour les Faces).

$G = 10X - 15(5 - X) = 10X - 75 + 15X = 25X - 75$.

b) $X \sim \mathcal{B}(5; 0,5)$.

c) $E(G) = 25E(X) - 75 = 25 \times 2,5 - 75 = 62,5 - 75 = \boxed{-12,5}$ €. Le jeu est **défavorable** au joueur.

d) $V(G) = 25^2 V(X) = 625 \times 5 \times 0,5 \times 0,5 = 625 \times 1,25 = 781,25$. $\sigma(G) = \sqrt{781,25} \approx 27,95$ €.

Exercice 13

a) $\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q}$.

b) $\frac{f(k+1)}{f(k)} \geq 1 \iff \frac{(n-k)p}{(k+1)q} \geq 1 \iff (n-k)p \geq (k+1)q \iff np - kp \geq kq + q \iff np - q \geq k(p+q) = k$.

Donc f croissante si $k \leq np - q = (n+1)p - 1$ et décroissante si $k \geq (n+1)p - 1$.

c) $\mathcal{B}(20; 0,3)$: $(n+1)p - 1 = 21 \times 0,3 - 1 = 5,3$. Mode en $k = \lfloor 5,3 \rfloor = 5$ ou $k = 6$. Calcul : $f(5) > f(6)$ donc mode = $\boxed{5}$. Vérifions : $(n+1)p - 1 = 5,3$, f croît jusqu'à $k = 5$, $f(6) < f(5)$ car $5,3 < 6$. Mode = $\boxed{5}$.

d) $\mathcal{B}(10; 0,5)$: $(n+1)p - 1 = 5,5 - 1 = 4,5$. Comme 4,5 n'est pas entier, mode unique = $\boxed{5}$. Vérifions : $f(5) = \binom{10}{5}/2^{10} = 252/1024 \approx 0,246$, maximal.

Exercice 14

a) $X \sim \mathcal{B}(50; 0,05)$ (si l'affirmation est vraie, 5% de défauts).

b) $E(X) = 50 \times 0,05 = 2,5$. $\sigma(X) = \sqrt{50 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{2,375} \approx 1,54$.

c) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$. Calculons :

$$P(X = 0) = 0,95^{50} \approx 0,0769, \quad P(X = 1) = \binom{50}{1}(0,05)(0,95)^{49} \approx 0,2025,$$

$$P(X = 2) = \binom{50}{2}(0,05)^2(0,95)^{48} \approx 0,2611,$$

$$P(X = 3) = \binom{50}{3}(0,05)^3(0,95)^{47} \approx 0,2199,$$

$$P(X = 4) = \binom{50}{4}(0,05)^4(0,95)^{46} \approx 0,1360.$$

$$P(X \leq 4) \approx 0,8964. \text{ Risque fournisseur : } P(X \geq 5) \approx 0,104 \approx 10,4\%.$$

d) Si le taux réel est 10% : $X' \sim \mathcal{B}(50; 0,1)$.

$$P(X' \leq 4) \text{ (le lot est accepté à tort)} \approx 0,431 \approx 43,1\%. \text{ Risque du client très élevé.}$$

e) (Bonus) On cherche s tel que $P(X \geq s+1) \leq 0,05$ avec $X \sim \mathcal{B}(50; 0,05)$.

$P(X \leq s) \geq 0,95$. Par la calculatrice : $P(X \leq 4) \approx 0,896 < 0,95$, $P(X \leq 5) \approx 0,962 > 0,95$. $\boxed{s = 5}$: on accepte le lot si au plus 5 défauts.

Corrigé du problème — Marche aléatoire

Partie A — Lien avec la loi binomiale

1. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ par définition (la position est la somme des déplacements successifs, partant de $S_0 = 0$).

2. $X_i \in \{-1, +1\}$, donc $Y_i = \frac{X_i+1}{2} \in \{0, 1\}$. $P(Y_i = 1) = P(X_i = +1) = p$ et $P(Y_i = 0) = P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Donc $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$.

3. Les Y_i sont indépendantes (car les X_i le sont) et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Donc $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$S_n = \sum X_i = \sum (2Y_i - 1) = 2 \sum Y_i - n = 2Y - n.$$

$$4. E(S_n) = 2E(Y) - n = 2np - n = n(2p - 1).$$

$$V(S_n) = 4V(Y) = 4npq.$$

5. $Y \in \{0, 1, \dots, n\}$, donc $S_n = 2Y - n \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$. Les valeurs diffèrent de 2 en 2. Si n est pair, S_n est pair. Si n est impair, S_n est impair. Donc $S_n \equiv n \pmod{2}$.

6. Pour $n = 100$, $p = 0,5$: $E(S_{100}) = 100(2 \times 0,5 - 1) = 0$. $V(S_{100}) = 4 \times 100 \times 0,25 = 100$. $\sigma(S_{100}) = 10$.

Interprétation : en moyenne, la particule est en 0 après 100 pas, mais elle peut s'en écarter de ± 10 typiquement. La zone $[-20, 20]$ contient la grande majorité des positions possibles (environ 95% avec 2σ).

Partie B — Cas symétrique $p = \frac{1}{2}$

$$6. E(S_n) = n(2 \times \frac{1}{2} - 1) = 0. V(S_n) = 4n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n. \sigma(S_n) = \sqrt{n}.$$

L'espérance nulle signifie que la marche est **non biaisée** : elle ne dérive ni à droite ni à gauche. L'écart-type $\sqrt{n}$ montre que la particule s'écarte typiquement de $\sqrt{n}$ de l'origine après n pas. Par exemple : après $n = 100$ pas, $\sigma = 10$, position typique dans $[-20, 20]$. Après $n = 10\,000$ pas : $\sigma = 100$. L'écart croît en $\sqrt{n}$, pas en n : c'est le phénomène de **diffusion**.

7. $S_n = 0 \iff 2Y - n = 0 \iff Y = \frac{n}{2}$. Ceci n'est possible que si n est pair. Si n est impair, $P(S_n = 0) = 0$.

Si $n = 2m$: $P(S_{2m} = 0) = P(Y = m) = \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}$.

8. $P(S_4 = 0) = \binom{4}{2} \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$.

$P(S_{10} = 0) = \binom{10}{5} \frac{1}{1024} = \frac{252}{1024} \approx 0,246$.

$P(S_{100} = 0) = \binom{100}{50} \frac{1}{4^{50}}$. Par Stirling : $\binom{100}{50} \approx \frac{4^{50}}{\sqrt{50\pi}}$, d'où $P \approx \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0,0798$.

Commentaire : la probabilité d'être à l'origine diminue quand n augmente ($0,375 \rightarrow 0,246 \rightarrow 0,080$). C'est naturel car les positions possibles sont de plus en plus nombreuses.

9. On a $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$. Stirling donne $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$(2n)! \sim \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = \sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}$.

$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}} = \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot 2^{2n} n^{2n}}{2\pi n \cdot n^{2n}} = \frac{2\sqrt{\pi n} \cdot 4^n}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Donc $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{1}{4^n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$.

Cette probabilité tend vers 0 : il est de plus en plus rare d'être à l'origine après beaucoup d'étapes, mais elle décroît **lentement** (en $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Partie C — Retour à l'origine

10. R_2 : la particule revient en 0 en 2 étapes. $S_2 = 0 \iff Y = 1$, i.e. un pas +1 puis un pas -1 ou inversement.

$P(R_2) = P(S_2 = 0) = \binom{2}{1} p \cdot q = 2pq$.

Vérification pour $p = \frac{1}{2}$: $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Cohérent avec $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$.

11. (Bonus) Le théorème de récurrence de Pólya (1921) affirme que la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ (dimension 1) est **récurrente** : la particule revient à l'origine avec probabilité 1.

C'est étonnant car $P(S_{2n} = 0) \rightarrow 0$! Mais la série $\sum P(S_{2n} = 0) \sim \sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge. Comme $P(S_{2n} = 0)$ est la probabilité d'être en 0 au temps $2n$, la divergence de cette série signifie que la particule visite 0 **infiniment souvent** (en moyenne).

Cependant, le **temps moyen de retour** est **infini** : $E(T_0) = +\infty$ où T_0 est le premier retour en 0. La marche revient, mais en un temps qui peut être arbitrairement long.

Fait remarquable : en dimension 1 et 2, la marche est récurrente (« un homme ivre finit toujours par rentrer chez lui »). En dimension 3 et plus, elle est **transiente** (il ne revient pas forcément : « un oiseau ivre ne retrouve pas son nid »).

Fin de la Fiche 15 — Schéma de Bernoulli & Loi binomiale

Tu maîtrises maintenant :

- L'épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et le schéma de Bernoulli (2 issues, même p , indépendance).
- Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, le triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton.
- La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p) : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- L'espérance $E(X) = np$, la variance $V(X) = npq$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{npq}$.
- Les probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
- La décomposition $X = X_1 + \dots + X_n$ comme somme de variables de Bernoulli indépendantes.

La théorie des probabilités n'est que le bon sens réduit au calcul. — Laplace

→ Prochaine étape : Somme de variables aléatoires & Loi des grands nombres.