Nombres complexes : calcul et équations

Terminale maths expertes · Chapitre 01

Les repères essentiels

- $$z = a + ib;$$
$$\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R};$$
$$i^2 = -1.$$
- $$\overline{z} = a - ib;$$
$$z\overline{z} = a^2 + b^2;$$
$$1/z = \overline{z}/(a^2 + b^2)$$

  pour $z \neq 0$.
- La conjugaison respecte somme, produit, inverse et puissances entières.
- $$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k.$$
- Une équation avec le conjugué devient un système en x, y réels.
- Pour un second degré réel de discriminant négatif, les deux racines sont $(-b \pm i\sqrt{-\Delta})/(2a)$.
- Une racine a donne un facteur $z - a$; un polynôme non nul de degré n a au plus n racines distinctes.

Avant de conclure. Ai-je précisé le domaine ? Séparé tous les cas ? Conservé le coefficient dominant ? Vérifié les solutions dans l'équation initiale ?

Une méthode à retenir

> **Méthode · Mettre un quotient sous forme algébrique**
>
> Vérifie que le dénominateur est non nul. Multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué du dénominateur. Développe seulement ensuite, et sépare les parties réelle et imaginaire.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Lire correctement une écriture**
>
> Pour $z = 3 - 2i$, écrivons $z = 3 + i(-2)$: le réel devant i est -2. Ainsi $\mathrm{Re}(z) = 3$ et $\mathrm{Im}(z) = -2$. La partie imaginaire est un réel ; le terme imaginaire complet est $-2i$.
>
> Pour $w = i(4 - i)$, la parenthèse empêche cette lecture directe. Distribuons :
> $i \times 4 + i \times (-i) = 4i - i^2$. Comme $i^2 = -1$,
>
> $$\begin{aligned} -i^2 &= -(-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$
>
> Donc $w = 1 + 4i$ et ses deux parties sont 1 et 4. Le double signe moins est la raison de l'apparition du $+1$.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Une extension n'autorise pas tous les réflexes**
>
> Nous conserverons addition, multiplication et produit nul, mais pas un ordre compatible avec toutes les propriétés usuelles des réels. Écrire $i > 0$ ou « discriminant complexe positif » n'a pas de sens dans ce cours. Pour commencer, reviens toujours aux deux coordonnées réelles.