Nombres complexes : module et trigonométrie

Terminale maths expertes · Chapitre 02

Les repères essentiels

- $$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2};$$
$$|zw| = |z||w|;$$
$$|z/w| = |z|/|w|$$
si $w \neq 0$.
- $z \neq 0$:
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r\mathrm{e}^{i\theta}$$
avec $r > 0$.
- Arguments modulo 2π ; zéro n'a pas d'argument.
- $\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)}$; Moivre multiplie l'argument par l'exposant.
- Euler : $2\cos x = \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}$, $2i\sin x = \mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}$.
- Pour additionner, préfère la forme algébrique ; pour multiplier, diviser ou élever à une puissance, pense à la forme exponentielle.

Autocontrôle. Le module est-il positif ? Ai-je vérifié les deux coordonnées du cercle ? Mes égalités d'angles sont-elles prises modulo 2π ? Ai-je traité les dénominateurs nuls avant de simplifier ?

Une méthode à retenir

> **Méthode · Déterminer un argument**
>
> Calcule $r = \sqrt{a^2+b^2}$, puis identifie simultanément $\cos\theta = a/r$ et $\sin\theta = b/r$. Repère le quadrant grâce aux signes de a, b. Donne un angle et rappelle que les autres s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Une valeur exacte nouvelle**
>
> L'angle $\pi/12$ est $\pi/4 - \pi/6$, puisque $3\pi/12 - 2\pi/12 = \pi/12$. La formule de différence donne
> $$\cos(\pi/12) = \cos(\pi/4)\cos(\pi/6) + \sin(\pi/4)\sin(\pi/6).$$
> Remplaçons les valeurs connues :
> $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$. Le signe plus vient de la formule de *différence* pour le cosinus. Le résultat est positif, comme attendu pour un angle entre 0 et $\pi/2$.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Argument et arctangente**
>
> La seule égalité $\tan\theta = b/a$ ne suffit pas à choisir le quadrant et ne s'utilise pas si $a = 0$. Sur une machine, la fonction `atan2(b,a)` tient compte des deux coordonnées. Un affichage décimal n'est pas une preuve d'une valeur exacte.