Géométrie complexe et racines de l'unité

Terminale maths expertes · Chapitre 03

Les repères essentiels

- $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$; $AB=|b-a|$; le milieu a pour affixe $(a+b)/2$.
- Le quotient $(c-a)/(b-a)$ a pour module AC/AB et pour argument l'angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$.
- Quotient réel : alignement ; quotient imaginaire pur non nul : orthogonalité des directions.
- Rotation : $z'-\omega=\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$.
- $\mathbb{U}_n=\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\,:\,0\leq k<n\}$; somme nulle pour $n\geq 2$.
- Une corde du cercle de rayon R mesure $2R|\sin((\beta-\alpha)/2)|$.

Contrôle. Les points définissant mes droites sont-ils distincts ? Ai-je conservé l'ordre des vecteurs ? Ai-je distingué l'argument modulo 2π d'une égalité réelle ? Ai-je compté toutes les racines une seule fois ?

Une méthode à retenir

> **Méthode · Un rapport de distances**
>
> Pour $b\neq z$, l'égalité $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k$ signifie $MA=k\,MB$. Note le point exclu B. Si $k=1$, pense à une médiatrice ; sinon, les carrés des modules permettent souvent de reconnaître un cercle après complétion des carrés.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Racines cubiques**
>
> $8i$ a pour module 8 et argument $\pi/2$. Si $z^3=8i$, son module r satisfait $r^3=8$, donc $r=2$. Les angles satisfont $3\theta=\pi/2+2k\pi$, d'où $\theta=\pi/6+2k\pi/3$. Pour $k=0,1,2$, ils valent $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$.
>
> Les coordonnées sont donc $2(\sqrt{3}/2+i/2)=\sqrt{3}+i$, $2(-\sqrt{3}/2+i/2)=-\sqrt{3}+i$ et $2(0-i)=-2i$. Chaque cube a pour module 8 et pour angle $\pi/2$ modulo 2π, donc vaut bien $8i$. Les trois angles sont différents modulo un tour : les solutions sont distinctes.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Un dessin conserve un rôle précis**
>
> Dessine pour repérer l'ordre des points, l'orientation et les valeurs interdites. Puis démontre avec le dictionnaire. Une figure à main levée n'impose ni un angle droit ni une égalité de longueurs ; elle aide à choisir la relation qui les prouvera.