Divisibilité et congruences

Terminale maths expertes · Chapitre 04

Les repères essentiels

- $a \mid b$ signifie $b = ak$ pour un entier k.
- Division euclidienne : $a = bq + r$ avec $b > 0$ et $0 \leq r < b$.
- $a \equiv b \pmod{n}$ signifie $n \mid (a - b)$, ou mêmes restes.
- Addition, soustraction, produit et puissances positives conservent une congruence.
- Une division exige une justification ; un inverse modulaire permet de simplifier.
- Un test de divisibilité découle des puissances de 10 modulo le diviseur.

Autocontrôle. Mes quotients sont-ils entiers ? Le reste est-il dans le bon intervalle ? Ai-je conservé le module ? Ai-je prouvé la période des puissances ? Ai-je vérifié la réciproque d'une équivalence ?

Une méthode à retenir

> **Méthode · Contrôle à deux conditions**
>
> Vérifie simultanément l'égalité $a = bq + r$ et les bornes $0 \leq r < b$. Une égalité seule ne suffit pas. Si un reste provisoire est négatif, diminue le quotient de 1 et ajoute b au reste.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Réduire avant de calculer**
>
> Les divisions $100 = 7 \times 14 + 2$ et $99 = 7 \times 14 + 1$ donnent $100 \equiv 2$ et $99 \equiv 1 \pmod{7}$. Les puissances et les sommes respectent les congruences, donc
>
> $$\begin{aligned} 100^2 + 99^3 &\equiv 2^2 + 1^3 = 4 + 1 \\ &= 5 \pmod{7}. \end{aligned}$$
>
> Comme $0 \leq 5 < 7$, 5 est bien le reste euclidien demandé, pas seulement un représentant quelconque. Le calcul conserve le reste, sans affirmer que les grands nombres sont égaux à 2 et 1.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Diviser n'est pas être plus petit**
>
> $2 \leq 3$ n'implique pas $2 \mid 3$. À l'inverse, un diviseur peut être négatif. Il faut produire un quotient entier, pas seulement un quotient réel.