Matrices, systèmes et transformations

Terminale maths expertes · Chapitre 07

Les repères essentiels

- $(m \times n)(n \times p)$ donne $m \times p$; une case d'un produit est une somme ligne-colonne.
- Le produit est associatif et distributif, mais généralement non commutatif.
- Inverse d'ordre 2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $ad - bc \neq 0$.
- Système : $AX = B$; si A inversible, $X = A^{-1}B$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; appliquer A puis B correspond à BA.
- Une projection peut perdre de l'information et ne pas être inversible ; une rotation conserve les distances.

Contrôle. Mes dimensions coïncident-elles ? Ai-je préservé l'ordre ? Ai-je vérifié l'inverse par un produit ? Mon résultat répond-il au problème avec les bonnes unités ?

Une méthode à retenir

> **Méthode · Respecter l'ordre**
>
> Appliquer d'abord A puis B donne $X \mapsto AX \mapsto B(AX) = (BA)X$. La transformation effectuée en premier apparaît donc à droite du produit. Écris une colonne intermédiaire si tu hésites.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Inverse et contrôle**
>
> Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$. La formule échange les deux coefficients diagonaux et change le signe des deux autres : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
>
> Vérifions AB : les quatre cases sont $2 - 1 = 1$, $-2 + 2 = 0$, $1 - 1 = 0$, $-1 + 2 = 1$. Donc $AB = I_2$. Pour BA, elles sont $2 - 1 = 1$, $1 - 1 = 0$, $-2 + 2 = 0$, $-1 + 2 = 1$. Donc $BA = I_2$ aussi. Cela vérifie la définition d'un inverse dans les deux ordres.

Les erreurs à éviter

> **Attention · L'ordre fait partie du sens**
>
> « Tourner, puis projeter » ne donne généralement pas le même résultat que « projeter, puis tourner ». Tu verras cette différence dans $AB \neq BA$. Écris les étapes sur une colonne pour retrouver l'ordre, au lieu d'appliquer automatiquement les réflexes du calcul réel.