Graphes, puissances et suites matricielles

Terminale maths expertes · Chapitre 08

Les repères essentiels

- Ordre : nombre de sommets ; degré : nombre d'arêtes incidentes ; longueur : nombre de transitions.
- Fixe l'ordre des sommets avant de construire une matrice d'adjacence.
- $(M^n)_{ij}$ compte les marches de longueur n, avec répétitions autorisées.
- $U_{n+1} = AU_n$ donne $U_n = A^n U_0$.
- Si $U_{n+1} = AU_n + C$ et $L = AL + C$, alors $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$; les facteurs doivent être vérifiés.

Contrôle. Ai-je confondu un nombre de parcours avec une distance ? Les répétitions sont-elles autorisées ? Ai-je vérifié le premier rang ? Une convergence est-elle effectivement prouvée, au-delà de l'existence d'un point fixe ?

Un exemple pour se repérer

Exemple · Un exemple d'ordre 2

Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, chaque case de N^2 est nulle : les seuls coefficients non nuls ne permettent aucun produit ligne-colonne non nul. Nous conjecturons $(I+N)^n = I + nN$.

Au rang 0, $(I+N)^0 = I$ et $I + 0N = I$. Supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}(I+N)^{n+1} &= (I+nN)(I+N) \\ &= I + N + nN + nN^2.\end{aligned}$$

Comme $N^2 = 0$, cela devient $I + (n+1)N$. L'hérédité et l'initialisation prouvent la formule pour tous les entiers naturels. Le terme en N^2 a disparu grâce à un calcul vérifié, pas parce qu'on l'aurait négligé.

Les erreurs à éviter

Attention · Convention de comptage

Dans cette fiche, les parcours comptés par les puissances d'adjacence peuvent repasser par un sommet et réutiliser une arête : ce sont des marches, souvent appelées chaînes ou chemins dans les exercices du programme. Une contrainte « sans répétition » doit être traitée séparément ; les puissances ne l'imposent pas.