Chaînes de Markov

Terminale maths expertes · Chapitre 09

Les repères essentiels

- P est stochastique par lignes : coefficients positifs ou nuls, chaque somme de ligne égale à 1.
- Convention du cours : distributions en ligne ; $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.
- $(P^n)_{ij}$ décrit une arrivée en j après n transitions depuis i.
- Invariant : $\pi P = \pi$ avec normalisation et positivité.
- Deux états : $x_{n+1} = (1-a-b)x_n + b$; si $0 < a+b < 2$, convergence vers $b/(a+b)$.
- Une limite éventuelle est invariante ; un invariant ne garantit pas une limite.

Contrôle. Ai-je fixé l'ordre des états ? Multiplié du bon côté ? Distingué visite et arrivée ? Vérifié chaque somme ? Démontré la convergence dans le modèle étudié ?

Une méthode à retenir

Méthode · Passer du texte à la matrice

Écrivons d'abord l'ordre V, B au-dessus des colonnes et à gauche des lignes. Une ligne fixe le départ ; une colonne fixe l'arrivée. La ligne V est donc $(0{,}8, 0{,}2)$; la ligne B est $(0{,}3, 0{,}7)$.

Pour contrôler, lis chaque case sous forme de phrase : « ligne B, colonne V : sachant que je prends le bus, probabilité de prendre le vélo au prochain pas ». Puis vérifie $0{,}8 + 0{,}2 = 1$ et $0{,}3 + 0{,}7 = 1$, ainsi que la positivité de chaque case. Les colonnes n'ont pas à sommer à 1 : elles regroupent des départs conditionnels différents.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Une population initiale

La ligne $\pi_0 = (0{,}6, 0{,}4)$ signifie que le départ est à vélo avec probabilité $0{,}6$, en bus avec probabilité $0{,}4$.

Pour arriver à vélo, les deux chemins sont $V \to V$, de probabilité $0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$, et $B \to V$, de probabilité $0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$. Leur somme vaut $0{,}60$. Pour arriver au bus, les chemins donnent $0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$ et $0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$, soit $0{,}40$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (0{,}6, 0{,}4) \\ &= \pi_0. \end{aligned}$$

Les probabilités sont conservées, même si chaque individu peut changer de mode. Depuis un départ certain à vélo, $\pi_0 = (1, 0)$ donne au contraire $(1 \times 0{,}8 + 0 \times 0{,}3, 1 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}7) = (0{,}8, 0{,}2)$. La distribution initiale et la matrice décrivent donc deux informations distinctes.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Dépendance et mémoire**
>
> La propriété de Markov n'affirme pas que les états successifs sont indépendants. Au contraire, connaître l'état présent modifie en général les probabilités du suivant. Elle dit quelle information du passé est utilisée par le modèle.