Suites arithmétiques

Première professionnelle · Chapitre 03

Une suite décrit des étapes

Définition · Comprendre la notion

Une suite associe un nombre u_n à chaque rang entier n. Le rang compte des étapes : jour, mois, rang d'une pièce. u_0 est la valeur initiale si le comptage commence à 0 ; u_1 l'est si le comptage commence à 1. Une formule explicite, par exemple $u_n = 3n + 2$, calcule directement n'importe quel terme. Une relation de récurrence, par exemple $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 2$, calcule le suivant à partir du précédent. Les points $(n ; u_n)$ représentent une évolution discrète ; les valeurs intermédiaires entre les rangs n'ont pas automatiquement un sens.

Ajouter toujours la même quantité

Définition · Comprendre la notion

Une suite est arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ pour une constante r, appelée raison. Entre deux étapes, la différence est donc constante. À partir du rang 0 : $u_n = u_0 + nr$. À partir d'un rang p : $u_n = u_p + (n - p)r$. La formule compte le nombre d'ajouts entre les deux rangs. Si $r > 0$, la suite croît ; si $r < 0$, elle décroît ; si $r = 0$, elle est constante. Ses points sont alignés, mais ses rangs restent entiers. Une hausse d'un montant fixe est arithmétique ; une hausse d'un pourcentage fixe ne l'est généralement pas.

Additionner une suite arithmétique

Définition · Comprendre la notion

Pour additionner N termes consécutifs d'une suite arithmétique, utilise

$$S = N \, \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

L'idée est d'associer le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier : chaque paire a la même somme. En écrivant la somme dans les deux sens, on obtient $2S = N(\text{premier} + \text{dernier})$. De u_p à u_n inclus, le nombre de termes est $n - p + 1$. En particulier, de u_0 à u_n, il y a $n + 1$ termes et non n. Une valeur à une date et un total cumulé sont deux questions différentes.

Modéliser un ajout fixe en contexte professionnel

Définition · Comprendre la notion

Un stock alimenté régulièrement, une durée de travail qui augmente d'un pas fixe ou un placement à intérêt simple peuvent suivre une évolution arithmétique. Le modèle $u_n = u_0 + nr$ n'est valable que tant que la raison reste constante et que les contraintes matérielles sont respectées. La valeur u_n désigne un état ; la somme de plusieurs u_n désigne une accumulation. Dans une situation réelle, nomme la période et distingue « le premier jour » de « après un jour ».

Suites arithmétiques au tableur

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un tableur peut placer les rangs dans la colonne A et les valeurs dans B. La ligne 2 contient le rang 0 et la valeur initiale. La ligne 3 calcule le terme suivant ; recopier la formule prolonge la suite. Une référence relative change lors de la recopie ; une référence absolue, écrite avec des signes dollar, conserve sa cellule. Les logiciels francophones utilisent souvent la virgule décimale et les anglophones le point. Vérifie les trois premiers résultats à la main avant de recopier cent lignes.

Les repères essentiels

Une suite décrit des étapes.

1. Détermine ce que représentent le rang, le terme et leurs unités éventuelles.
2. Repère le premier rang et la valeur initiale.
3. Pour une formule explicite, remplace seulement le rang ; pour une récurrence, calcule les termes successivement.
4. Contrôle le nombre de transitions et traduis le rang dans le contexte temporel.

Ajouter toujours la même quantité.

1. Calcule une différence « terme suivant moins terme précédent » pour identifier r.
2. Compte les étapes par une différence de rangs.
3. Applique $u_n = u_p + (n-p)r$ en conservant le signe de r.
4. Si r est inconnue, divise la différence des valeurs par la différence des rangs.
5. Contrôle le résultat avec un terme connu et les contraintes du contexte.

Additionner une suite arithmétique.

1. Identifie le premier et le dernier rang de la somme, bornes incluses.
2. Calcule les deux termes extrêmes avec la formule de la suite.
3. Compte $N = n - p + 1$ termes, puis applique $S = N(u_p + u_n)/2$.
4. Contrôle l'ordre de grandeur : pour des termes positifs, le total est entre N fois le plus petit et N fois le plus grand.
5. Traduis le total dans l'unité demandée, sans le confondre avec le dernier terme.

Modéliser un ajout fixe en contexte professionnel.

1. Choisis un rang initial et précise le moment auquel le stock ou le coût est observé.
2. Calcule le bilan constant avec ses signes et ses unités.
3. Écris la récurrence et la formule explicite, puis compte les périodes réellement écoulées.
4. Pour un total de flux, additionne les termes au lieu de prendre seulement le dernier.
5. Contrôle les limites physiques et la cohérence du résultat.

Suites arithmétiques au tableur.

1. Saisis le rang zéro et la valeur initiale sur la même ligne.
2. Écris la formule de récurrence dans la ligne suivante.
3. Garde relative la référence au terme précédent et fige les paramètres.
4. Vérifie trois valeurs à la main puis recopie.
5. Contrôle le rang final et le nombre de termes de toute somme.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = u_n + 7$, on saisit 0 en A2 et 20 en B2. La ligne suivante contient `=A2+1` en A3 et `=B2+7` en B3.

Après recopie, A4 vaut 2 et B4 utilise `=B3+7`. On obtient ainsi 20, 27 puis 34. Les différences successives $27 - 20$ et $34 - 27$ valent toutes deux 7 : la règle arithmétique est respectée.

Si la raison 7 est stockée en D1, on peut écrire `=B2+$D$1`. Changer D1 recalcule alors toute la suite. B2 ne doit pas être figée : chaque nouveau terme doit partir de la valeur immédiatement précédente.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Dans $u_{n+1} = 2u_n + 1$, remplace u_n par la valeur déjà calculée, pas par n. La suite obtenue en écrivant $2n + 1$ répondrait à une autre définition.