Équations et fonctions du second degré

Première professionnelle · Chapitre 04

Résoudre avec des courbes

Définition · Comprendre la notion

Résoudre $f(x) = k$ consiste à chercher les abscisses où la courbe rencontre la droite horizontale $y = k$. Résoudre $f(x) = g(x)$ consiste à chercher les abscisses de leurs intersections. Pour $f(x) \leq g(x)$, repère les portions où la première courbe est sous la seconde, en incluant les intersections. Un graphique donne souvent une valeur approchée. Un solveur ou un balayage numérique permet d'affiner ; une substitution contrôle le résultat. Il faut rechercher toutes les intersections dans le domaine. Un zoom trop limité peut masquer une autre solution.

Reconnaître une parabole et ses racines

Définition · Comprendre la notion

Un polynôme du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une parabole ; $c = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine. Une racine est un réel dont l'image est nulle. La forme $a(x - r_1)(x - r_2)$ rend les racines visibles : r_1 et r_2, qui peuvent être égales. Si deux racines sont connues, leur moyenne $(r_1 + r_2)/2$ donne l'abscisse du sommet. Si elles ne sont pas connues, on peut les rechercher graphiquement ou avec un solveur. Le calcul par discriminant n'est pas un attendu de ce parcours. Une parabole peut couper l'axe horizontal deux fois, une seule fois ou aucune fois.

Étudier le signe d'un produit

Définition · Comprendre la notion

Le signe d'un produit s'obtient en combinant les signes de ses facteurs. Deux facteurs de même signe donnent un produit positif ; de signes opposés, un produit négatif. Pour $a(x - r_1)(x - r_2)$ avec $r_1 < r_2$, le signe est celui de a à l'extérieur des racines et le signe opposé entre elles. Aux racines, la valeur est nulle. Si la racine est double, $a(x - r)^2$ garde le signe de a sauf en r, où il vaut 0. Pour une inéquation, écris les intervalles et décide séparément si les racines doivent être incluses.

Modéliser avec le second degré

Définition · Comprendre la notion

Un produit de deux grandeurs qui varient avec x conduit souvent au second degré : aire, recette, énergie ou distance modélisée. Définis le domaine à partir du contexte avant d'étudier la parabole. La symétrie permet de repérer le sommet lorsque deux valeurs symétriques ou les racines sont connues. Si $a > 0$, le sommet donne un minimum ; si $a < 0$, un maximum. Sur un domaine restreint, vérifie que le sommet y appartient et compare aussi les bornes. Le modèle décrit les hypothèses données ; il ne prouve pas à lui seul qu'une prévision commerciale ou technique se réalisera.

Chercher une racine par balayage

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Quand une factorisation n'est pas accessible, utilise un graphique pour repérer une zone, puis une table de valeurs à pas de plus en plus fin. Sur un intervalle où un polynôme est continu et monotone, un changement de signe entre deux bornes encadre une unique racine. On peut ensuite réduire le pas ou partager l'intervalle en deux. Un balayage peut manquer une racine double, car celle-ci ne change pas forcément le signe. Il ne garantit pas non plus d'avoir trouvé toutes les racines si le domaine examiné est incomplet. La réponse doit indiquer sa précision ; ne transforme pas une approximation du solveur en égalité exacte.

Les repères essentiels

Résoudre avec des courbes.

1. Identifie les deux courbes à comparer et vérifie le domaine ainsi que la fenêtre.
2. Relève les abscisses de toutes les intersections visibles sur ce domaine.
3. Pour une inégalité, repère les intervalles où la bonne courbe est au-dessus, puis traite les bornes.
4. Indique la précision de lecture ; si nécessaire, encadre numériquement et justifie l'unicité.

Reconnaître une parabole et ses racines.

1. Vérifie que le coefficient du carré est non nul.
2. Utilise la forme factorisée et la règle du produit nul pour rechercher les racines.
3. Contrôle le signe des nombres : $x + 2 = x - (-2)$ correspond à la racine -2.
4. Pour construire une expression, conserve le coefficient a ; développe seulement si cela est demandé.
5. Vérifie les racines par substitution et utilise leur moyenne pour l'axe de symétrie.

Étudier le signe d'un produit.

1. Factorise si nécessaire et range les racines dans l'ordre croissant.
2. Détermine le signe de chaque facteur sur chaque intervalle, y compris le coefficient constant.
3. Multiplie les signes et place zéro aux racines.
4. Sélectionne les portions demandées, puis inclus ou exclus les racines selon le caractère large ou strict.

Modéliser avec le second degré.

1. Définis x, son unité et les contraintes avant d'écrire la fonction.
2. Exprime les autres quantités en fonction de x puis construis l'aire, la recette ou le bénéfice.
3. Repère le sommet et le sens des variations à partir d'une forme adaptée.
4. Vérifie si le sommet est autorisé ; sinon, compare les valeurs aux limites permises.
5. Donne la valeur de x et la valeur optimale avec leurs unités, puis contrôle les contraintes.

Chercher une racine par balayage.

1. Repère le domaine et une portion où les variations rendent la recherche compréhensible.
2. Calcule les valeurs aux deux bornes et cherche un changement de signe.
3. Justifie l'existence par la continuité et l'unicité par la stricte monotonie, si elle est connue.
4. Réduis le pas ou partage l'intervalle, puis donne un encadrement et une approximation correctement notés.
5. Vérifie qu'une racine double ou une fenêtre trop étroite n'a pas été oubliée.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour résoudre $x^2 > 4$ sur $[-5; 5]$, on compare la parabole $y = x^2$ à la droite horizontale $y = 4$. Elles se coupent en x égal à -2 et à 2. Entre -2 et 2, la parabole est sous la droite : par exemple $0^2 < 4$. À l'extérieur, elle est au-dessus : $(-3)^2 > 4$ et $3^2 > 4$.

On conserve donc les portions $[-5; -2[$ et $]2; 5]$. Les bornes -2 et 2 sont exclues par le signe strict. Les bornes -5 et 5 restent incluses, car elles sont dans le domaine et satisfont effectivement l'inégalité. Le contrôle d'un point dans chaque portion aide à détecter une inversion, mais la conclusion sur tout l'intervalle repose sur la forme et les variations de la parabole.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

L'absence d'intersection dans une fenêtre ne prouve pas l'absence de solution sur tout le domaine. Vérifie les limites de la fenêtre, l'échelle et, si possible, la formule ou les variations.