Intérêts simples, coûts et résultat

Première professionnelle · Chapitre 06

Les intérêts simples

Définition · Comprendre la notion

À intérêts simples, les intérêts sont calculés sur le capital initial C pendant toute la durée. Avec un taux annuel t en écriture décimale et une durée d en années, $I = Ctd$. La valeur acquise est $C + I = C(1 + td)$. Si la durée est en mois, utilise $d = m/12$. Pour des jours, l'énoncé doit donner la convention, par exemple année de 360 ou de 365 jours ; on ne les intervertit pas. Le taux et la durée doivent se rapporter à la même unité de temps. Les intérêts simples forment un modèle linéaire en durée. Ils se distinguent des intérêts composés, où les intérêts s'ajoutent périodiquement au capital et produisent à leur tour des intérêts.

Taux proportionnels et durées

Définition · Comprendre la notion

Dans un modèle à intérêts simples, le taux proportionnel mensuel associé au taux annuel t est $t/12$, et le taux trimestriel $t/4$. Les durées s'additionnent sans capitalisation intermédiaire. Cette proportionnalité ne donne pas le taux équivalent d'un placement à intérêts composés. Le mot employé et le mode de calcul doivent être lus avant de choisir une formule. Pour un calcul en jours, la base annuelle doit être précisée. Avec une convention de 360 jours, 90 jours représentent un quart d'année ; avec 365 jours, la fraction est 90/365. Les conventions sont des données du modèle, pas des règles universelles à inventer.

Coût, recette et résultat

Définition · Comprendre la notion

Le coût total $C(x)$ rassemble les coûts fixes et les coûts variables pour une production x. Avec un prix unitaire constant p et toutes les unités vendues, la recette est $R(x) = px$. Le résultat est $B(x) = R(x) - C(x)$. Un résultat positif correspond à un bénéfice dans le périmètre des charges retenues ; un résultat négatif à une perte. Le seuil de rentabilité se recherche par $B(x) = 0$, puis par l'étude du signe. Respecte le domaine de production, la capacité maximale et le caractère entier éventuel de x. Une solution réelle sert d'abord de frontière mathématique ; la décision porte ensuite sur les quantités réalisables. Les montants HT/TTC ne doivent pas être mélangés.

Coût marginal et dérivée

Définition · Comprendre la notion

Pour une production entière x, le coût exact d'une unité supplémentaire est $C(x + 1) - C(x)$. Dans un modèle continu dérivable, $C'(x)$ approxime ce coût pour un accroissement d'une unité, si la variation locale est suffisamment régulière. La dérivée a les unités d'un coût par unité produite. Elle n'est pas le coût moyen $C(x)/x$. Pour un accroissement h petit, $C(x + h) - C(x) \approx hC'(x)$. Si chaque unité est vendue au prix p constant, la dérivée du résultat vaut $B' = p - C'$. Le signe indique localement si produire davantage améliore le résultat. Le maximum exige ensuite un contrôle de signe et des bornes, pas seulement la résolution d'une égalité.

Coût moyen et choix de production

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour $x > 0$, le coût moyen par unité est $C_m(x) = C(x)/x$. Il répartit le coût total sur les unités produites. Les coûts fixes font souvent baisser ce coût moyen au début, car ils sont répartis sur davantage d'unités. Par exemple, si $C(x) = F + vx$, alors $C_m(x) = F/x + v$. Le terme F/x décroît pour F > 0, tandis que v représente le coût variable unitaire constant. Avec un coût quadratique, le coût moyen peut ensuite remonter. Étudie sa dérivée sur le domaine de production strictement positif et contrôle les bornes. Minimiser le coût moyen et maximiser le résultat total sont deux objectifs différents.

Les repères essentiels

Les intérêts simples.

1. Repère le capital initial, le taux et sa période de référence.
2. Convertis le taux en décimal et la durée dans la même unité de temps.
3. Calcule $I = Ctd$, ou résous cette relation si une donnée est inconnue.
4. Ajoute le capital seulement si la valeur acquise est demandée.
5. Contrôle les unités, la convention de durée et la proportionnalité du résultat.

Taux proportionnels et durées.

1. Identifie le modèle simple et la convention proportionnelle.
2. Compte le nombre de périodes dans l'année : 12 mois, 4 trimestres ou la base de jours donnée.
3. Divise le taux annuel par ce nombre pour obtenir un taux par période.
4. Utilise un taux décimal et un nombre de périodes compatibles.
5. Contrôle le calcul en revenant à une fraction d'année.

Coût, recette et résultat.

1. Définis x et son domaine : entier ou réel, capacité maximale et ventes possibles.
2. Écris coût et recette sur une même base monétaire.
3. Calcule $B = R - C$ en distribuant correctement le signe moins.
4. Résous $B = 0$ puis étudie le signe sur le domaine autorisé.
5. Contrôle les quantités proches du seuil et précise nul, positif ou négatif.

Coût marginal et dérivée.

1. Distingue coût total, coût moyen et coût de l'unité supplémentaire.
2. Pour l'exact, calcule $C(x+1) - C(x)$ avec les parenthèses.
3. Pour l'approximation locale, calcule $C'(x)$ et précise l'accroissement utilisé.
4. Pour un résultat, étudie le signe de $p - C'(x)$ sur le domaine.
5. Calcule la valeur du résultat à l'optimum avant de parler de bénéfice.

Coût moyen et choix de production.

1. Vérifie que la quantité produite est strictement positive.
2. Écris $C_m(x) = C(x)/x$ et simplifie terme par terme.
3. Calcule les valeurs demandées ou étudie la dérivée sur le domaine autorisé.

4. Pour un minimum, contrôle le changement de signe et les bornes.
5. Exprime le résultat par unité et distingue cet objectif du coût total ou du bénéfice.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Un capital de 2 000 euros est placé à intérêts simples au taux annuel de 3 pour cent pendant huit mois. Le taux décimal est 0,03 et la durée annuelle vaut $8/12 = 2/3$.

Les intérêts sont

$$\begin{aligned} I &= 2\,000 \times 0{,}03 \times 2/3 \\ &= 60 \times 2/3 \\ &= 40 \end{aligned}$$

euros. La valeur acquise est $2\,000 + 40 = 2\,040$ euros.

Le contrôle par taux mensuel proportionnel donne $3/12 = 0{,}25$ pour cent par mois, donc $2\,000 \times 0{,}0025 = 5$ euros mensuels. Huit mois donnent $8 \times 5 = 40$ euros. Les deux méthodes coïncident parce que la base initiale reste constante.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Le taux et la durée doivent parler de la même période. Un taux annuel multiplié par une durée exprimée directement en mois donne un résultat douze fois trop grand.