Solides et géométrie dans l'espace

Première professionnelle · Chapitre 07

Reconnaître des solides et calculer leur volume

Définition · Comprendre la notion

Un pavé droit a pour volume Llh ; un cube d'arête a a pour volume a^3. Pour un prisme droit ou un cylindre, le volume est aire de base multipliée par hauteur ; pour le cylindre, $V = \pi r^2 h$. Pour une pyramide ou un cône, $V = Bh/3$ où B est l'aire de la base. Pour une boule de rayon r, $V = 4\pi r^3/3$. Ces dernières formules sont rappelées lorsqu'elles sont utilisées. La hauteur est perpendiculaire à la base, même si une perspective donne une impression différente. Un solide composé peut être décomposé en volumes sans chevauchement ; un trou se soustrait. Les volumes utilisent des unités cubiques ; $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3$.

Couper un solide par un plan

Définition · Comprendre la notion

La section d'un solide par un plan est la figure formée par leur intersection. Sa forme dépend du solide et de l'orientation du plan. Dans un pavé droit, une coupe parallèle à une face donne un rectangle de mêmes dimensions que cette face. Dans un cylindre droit, une coupe parallèle aux bases donne un disque ; une coupe par l'axe donne un rectangle. Une coupe oblique peut donner une autre forme. Pour construire une section en géométrie dynamique, crée le solide, définis le plan par trois points non alignés, puis affiche les intersections du plan avec les faces. Une vue en perspective déforme les angles et longueurs ; mesure dans le plan de coupe.

Lire les positions relatives dans un solide

Définition · Comprendre la notion

Dans l'espace, deux droites peuvent être sécantes, parallèles, ou non coplanaires. Des droites non coplanaires ne se coupent pas mais ne sont pas parallèles : elles ne tiennent pas dans un même plan. Pour un pavé ABCDEFGH, on adopte la convention ABCD sur la base, EFGH au-dessus, avec AE, BF, CG et DH verticales. Décris cette convention avant d'utiliser les noms d'arêtes. Une arête peut paraître oblique ou raccourcie dans une perspective sans changer sa direction réelle. Appuie une conclusion sur une face commune, un parallélisme du solide ou des coordonnées, plutôt que sur l'apparence seule.

Concevoir un volume sous contrainte

Définition · Comprendre la notion

Un problème de volume commence par les dimensions, les contraintes et la formule du solide. Isole une grandeur pour comparer des choix réalisables. Un volume identique ne signifie pas une surface ou une forme identique. Selon la question, on minimise une quantité de matière, on respecte une capacité, ou on cherche une dimension. Un tableur ou un logiciel métier permet de tester plusieurs valeurs et de tracer une grandeur en fonction d'une dimension. Un minimum observé sur quelques essais est une conjecture ; une démonstration exige un raisonnement supplémentaire adapté au cours.

Agrandir une figure ou un solide

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Une transformation de rapport positif k multiplie les longueurs par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3. Ces puissances viennent du nombre de dimensions multipliées : une aire est un produit de deux longueurs, un volume de trois. Le rapport doit être le même dans toutes les directions pour appliquer ces règles. Une échelle 1:s signifie qu'une longueur sur le dessin correspond à s fois cette longueur dans la réalité, avec les mêmes unités. Un changement d'échelle conserve les angles et les rapports de longueurs, mais pas les mesures d'aire ou de volume.

Les repères essentiels

Reconnaître des solides et calculer leur volume.

1. Identifie le solide et sa formule de volume.
2. Repère rayon ou diamètre, aire de base et hauteur perpendiculaire.
3. Convertis toutes les longueurs dans une même unité avant le produit.
4. Additionne ou soustrais les volumes utiles, en conservant une valeur exacte si possible.
5. Convertis l'unité cubique ou la capacité et contrôle la taille du résultat.

Couper un solide par un plan.

1. Identifie le solide et la position du plan par rapport aux faces, bases ou axe.
2. Détermine la forme géométrique de la section.
3. Retrouve ses dimensions réelles, en distinguant rayon et diamètre.
4. Calcule l'aire si elle est demandée.
5. Pour une construction, utilise un plan bien défini et contrôle la coupe dans une vue adaptée.

Lire les positions relatives dans un solide.

1. Annonce ou vérifie la convention de nommage du solide.
2. Cherche une face commune qui justifie une propriété plane.
3. Compare les directions et cherche un point commun entre les droites complètes.
4. Si elles ne sont ni parallèles ni sécantes, conclus à la non-coplanarité.
5. Ne remplace pas cette justification par une simple lecture de la perspective.

Concevoir un volume sous contrainte.

1. Définis les dimensions, leurs unités et les contraintes de fabrication.
2. Écris le volume imposé et isole une dimension si possible.
3. Traduis les limites en équations ou inéquations sur le domaine positif.
4. Calcule ou compare la grandeur réellement demandée.
5. Contrôle les dimensions obtenues et distingue optimum prouvé et meilleur essai observé.

Agrandir une figure ou un solide.

1. Identifie le rapport dans le sens départ vers arrivée et vérifie qu'il est uniforme.
2. Distingue longueur, aire et volume.
3. Utilise respectivement k, k^2 ou k^3.
4. Si le rapport de surface ou de volume est donné, retrouve k avec la racine adaptée.

5. Contrôle les unités et le sens agrandissement ou réduction.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Un cylindre droit a un rayon de 3 cm et une hauteur de 8 cm. Un plan contenant son axe coupe chaque base selon un diamètre. La largeur de la section vaut donc $2 \times 3 = 6$ cm.
>
> L'autre dimension est la hauteur 8 cm. La section est un rectangle d'aire $6 \times 8 = 48\,\text{cm}^2$. Une coupe parallèle aux bases donnerait au contraire un disque d'aire $9\pi\,\text{cm}^2$.
>
> Le même solide produit ainsi des sections différentes selon l'orientation du plan. Avant de choisir une formule d'aire, on doit donc identifier la coupe demandée.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Un volume utilise des unités cubiques : passer de centimètres à décimètres sur chaque dimension multiplie trois facteurs de conversion. Une conversion de longueur seule ne suffit pas.