Vecteurs du plan

Première professionnelle · Chapitre 08

Un vecteur représente un déplacement

Définition · Comprendre la notion

Un vecteur non nul possède une direction, un sens et une norme. Plusieurs flèches situées à des endroits différents peuvent représenter le même vecteur si ces trois caractéristiques sont identiques. $\overrightarrow{AB}$ désigne le déplacement de A vers B. Son opposé est $\overrightarrow{BA}$. Le vecteur nul correspond à un déplacement sans mouvement ; sa norme vaut zéro et on ne lui attribue pas de direction. Pour additionner des déplacements, place-les bout à bout : la relation de Chasles donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. L'ordre des lettres indique le départ et l'arrivée.

Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan

Définition · Comprendre la notion

Dans un repère, les coordonnées d'un point indiquent sa position ; celles d'un vecteur décrivent un déplacement. Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

On soustrait toujours départ à arrivée. Deux vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées correspondantes sont égales. Pour construire l'arrivée B depuis A avec un déplacement $(u ; v)$, ajoute les coordonnées : $B(x_A + u ; y_A + v)$. Ces règles ne demandent pas que le repère soit orthonormé ; les formules de longueur, elles, le demanderont.

Additionner et multiplier des vecteurs

Définition · Comprendre la notion

Dans le plan, $(x ; y) + (x' ; y') = (x + x' ; y + y')$ et $k(x ; y) = (kx ; ky)$. Géométriquement, la somme compose deux déplacements. Multiplier par un réel positif conserve le sens ; par un réel négatif, il l'inverse. La norme est multipliée par $|k|$. La différence $\vec{u} - \vec{v}$ signifie $\vec{u} + (-\vec{v})$. Elle ne correspond pas à une division de coordonnées. Ces règles servent notamment à composer des translations ou des forces modélisées par des vecteurs.

Reconnaître des directions parallèles

Définition · Comprendre la notion

Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est un multiple de l'autre. Pour des vecteurs non nuls, ils ont des directions parallèles ; le sens peut être le même ou opposé. Avec des coordonnées, cherche un même coefficient k pour toutes les composantes. Les coordonnées nulles doivent être contrôlées séparément : on ne divise pas par zéro. Trois points distincts A, B, C sont alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Deux droites dirigées par des vecteurs colinéaires sont parallèles ou confondues. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, mais ne définit pas une direction de droite.

Mesurer un vecteur du plan

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Dans un repère orthonormé, la norme de $\vec{u} = (x; y)$ vaut $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est la longueur d'un représentant, donc un nombre positif ou nul. La formule provient de Pythagore appliqué aux déplacements horizontal et vertical. Pour deux points, calcule d'abord les coordonnées de leur différence. Le repère doit avoir des axes perpendiculaires et des unités de même longueur. Sur un dessin dont les échelles diffèrent, la formule ne peut pas être appliquée directement aux longueurs visuelles. La norme de $k\vec{u}$ vaut $|k|||\vec{u}||$.

Les repères essentiels

Un vecteur représente un déplacement.

1. Lis les lettres dans l'ordre départ puis arrivée.
2. Compare direction, sens et norme pour reconnaître deux vecteurs égaux.
3. Enchaîne les déplacements avec la relation de Chasles.
4. Remplace un trajet inverse par le vecteur opposé.
5. Distingue déplacement résultant et longueur totale du trajet.

Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan.

1. Identifie le point de départ et le point d'arrivée.
2. Soustrais les coordonnées du départ à celles de l'arrivée, avec des parenthèses pour les valeurs négatives.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute le déplacement aux coordonnées du départ.
4. Pour une figure, écris une égalité de vecteurs avec les bonnes orientations.
5. Contrôle en recalculant la différence ou l'autre paire de côtés.

Additionner et multiplier des vecteurs.

1. Calcule d'abord les multiples de vecteurs demandés.
2. Additionne les composantes correspondantes.
3. Pour une soustraction, inverse toutes les composantes du vecteur soustrait.
4. Pour une compensation, prends l'opposé de la résultante.
5. Contrôle en recomposant l'expression ou en vérifiant la nullité de chaque coordonnée.

Reconnaître des directions parallèles.

1. Vérifie si un vecteur est nul et distingue ce cas d'une direction de droite.
2. Choisis une composante non nulle pour trouver un facteur candidat k.
3. Contrôle toutes les autres composantes, notamment les zéros.
4. Pour des points, calcule d'abord deux vecteurs de même origine.
5. Conclue sur la colinéarité ou l'alignement et interprète le signe du facteur.

Mesurer un vecteur du plan.

1. Vérifie que le repère est orthonormé.
2. Pour une distance, calcule les différences de coordonnées.
3. Additionne les carrés puis prends la racine positive.
4. Pour un vecteur unitaire, divise toutes les composantes par la norme non nulle.

5. Contrôle la longueur obtenue et distingue signe des composantes et positivité de la norme.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $\vec{u} = (2; -1)$ et $\vec{v} = (-3; 4)$, calculons $2\vec{u} - \vec{v}$. On commence par $2\vec{u} = (4; -2)$. Le vecteur opposé de $\vec{v}$ est $(3; -4)$.

La somme vaut donc $(4; -2) + (3; -4) = (7; -6)$. En écriture directe, on obtient $(4 - (-3); -2 - 4)$, le même résultat.

Pour contrôler, on ajoute $\vec{v}$ au résultat :

$$\begin{aligned}(7; -6) + (-3; 4) &= (4; -2) \\ &= 2\vec{u}.\end{aligned}$$

Ce retour à l'expression initiale permet de détecter un signe oublié.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Un déplacement total nul ne signifie pas une distance parcourue nulle. Un aller-retour se compense vectoriellement tout en conservant une longueur de trajet positive.