Trigonométrie et signaux périodiques

Première STI2D · spécialité maths · Chapitre 01

Mesurer les angles en radians

Définition · Comprendre la notion

Un radian est l'angle qui intercepte sur un cercle un arc de longueur égale au rayon. Un tour complet correspond à 2π radians, donc $180^\circ = \pi$ radians. Pour convertir des degrés en radians, multiplie par $\pi/180$; dans l'autre sens, multiplie par $180/\pi$. Garde les multiples de π sous forme exacte quand c'est possible. Un angle orienté peut être positif ou négatif. Deux mesures qui diffèrent d'un multiple entier de 2π représentent la même position sur le cercle. La mesure principale appartient ici à $]-\pi;\pi]$: on retire ou ajoute des tours entiers.

Lire sinus et cosinus sur le cercle

Définition · Comprendre la notion

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé direct. Le point associé à l'angle x a pour coordonnées $(\cos x;\sin x)$. Le cosinus est l'abscisse, le sinus l'ordonnée. Ainsi $-1\le\cos x\le 1$, $-1\le\sin x\le 1$ et $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ par Pythagore. Pour $x=0,\pi/6,\pi/4,\pi/3,\pi/2$, les cosinus valent respectivement $1,\sqrt{3}/2,\sqrt{2}/2,1/2,0$; les sinus $0,1/2,\sqrt{2}/2,\sqrt{3}/2,1$. En π, le point est $(-1;0)$. Les signes se lisent selon le quadrant ; la calculatrice doit être en mode radian pour une mesure en radians.

Angles associés et symétries

Définition · Comprendre la notion

Les symétries du cercle donnent $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$. Le point d'angle $\pi-x$ est symétrique par rapport à l'axe vertical : son cosinus est $-\cos x$ et son sinus $\sin x$. Le point d'angle $\pi+x$ est opposé : ses deux coordonnées changent de signe. Pour les angles complémentaires, $\cos(\pi/2-x)=\sin x$ et $\sin(\pi/2-x)=\cos x$. Enfin $\cos(\pi/2+x)=-\sin x$ et $\sin(\pi/2+x)=\cos x$. Ces relations se comprennent sur la figure : mieux vaut reconstruire le signe avec le quadrant que mémoriser une liste sans repère.

Comprendre les courbes sinus et cosinus

Définition · Comprendre la notion

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et de période 2π : ajouter un tour ne change pas leur valeur. Le cosinus est pair, le sinus impair. Sur $[0;\pi]$, le cosinus décroît de 1 à -1. Sur $[-\pi/2;\pi/2]$, le sinus croît de -1 à 1, puis décroît de 1 à -1 sur $[\pi/2;3\pi/2]$. Les valeurs restent entre -1 et 1. La relation $\cos x=\sin(x+\pi/2)$ relie les deux courbes par un décalage horizontal. Une courbe périodique se prolonge en répétant le même motif, pas en continuant une seule branche croissante.

Amplitude, période et phase d'un signal

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un signal sinusoïdal peut s'écrire $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ ou $A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$ et $\omega > 0$ dans cette présentation. A est l'amplitude ; les valeurs sont comprises entre $-A$ et A. La pulsation ω s'exprime en rad/s lorsque t est en secondes. La période est $T = 2\pi/\omega$ et la fréquence $f = 1/T$. La phase initiale est φ et la phase instantanée $\omega t + \varphi$. La phase décale le motif dans le temps ; elle ne change ni amplitude ni période. Un décalage vertical supplémentaire modifierait la valeur moyenne du signal.

Les repères essentiels

Mesurer les angles en radians.

1. Identifie l'unité donnée et celle demandée.
2. Utilise $\pi/180$ pour degrés vers radians et $180/\pi$ dans l'autre sens.
3. Simplifie les fractions avant toute approximation.
4. Pour une mesure principale, ajoute ou retire des tours entiers de 2π.
5. Vérifie l'appartenance à l'intervalle et le mode angulaire de la calculatrice.

Lire sinus et cosinus sur le cercle.

1. Place mentalement l'angle sur le cercle et identifie son quadrant.
2. Lis le cosinus horizontalement et le sinus verticalement.
3. Utilise les valeurs remarquables ou l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
4. Si un carré donne deux signes, sélectionne avec le quadrant ou conserve les deux si rien ne les départage.
5. Contrôle les bornes entre -1 et 1 et le mode radian de l'outil.

Angles associés et symétries.

1. Exprime l'angle à partir d'un angle remarquable et d'un tour, demi-tour ou quart de tour.
2. Identifie la symétrie et son effet sur les coordonnées.
3. Utilise les valeurs exactes de l'angle de référence.
4. Contrôle séparément le signe du sinus et celui du cosinus dans le quadrant.
5. Pour une justification, décris les coordonnées conservées ou échangées.

Comprendre les courbes sinus et cosinus.

1. Repère les valeurs remarquables et les bornes -1 et 1.
2. Utilise la période pour ramener un angle à un motif connu.
3. Vérifie l'intervalle de monotonie avant de comparer deux images.
4. Utilise parité ou symétrie pour compléter les valeurs.
5. Pour réfuter une croissance globale, cherche deux angles ordonnés dont les images sont dans l'ordre inverse.

Amplitude, période et phase d'un signal.

1. Identifie A, la pulsation et la phase dans l'argument du sinus ou cosinus.
2. Déduis les bornes du signal en l'absence de décalage vertical.
3. Calcule $T = 2\pi/\omega$ puis $f = 1/T$ avec les unités.

4. Calcule la valeur initiale en remplaçant t par zéro.
5. Pour un décalage temporel, factorise la pulsation et vérifie le sens de l'avance ou du retard.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $x = \pi/3$, le point du cercle est $(1/2; \sqrt{3}/2)$. Son cosinus vaut donc 1/2 et son sinus $\sqrt{3}/2$. Les deux nombres sont positifs, comme attendu dans le premier quadrant.

Le contrôle de la distance donne

$$\begin{aligned}(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 &= 1/4 + 3/4 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Le point se situe bien sur le cercle unité.

Le point d'angle $-\pi/3$ a la même abscisse 1/2, mais l'ordonnée opposée $-\sqrt{3}/2$. Connaître seulement le cosinus ne suffit donc pas à connaître le sinus sans préciser la position. La figure permet de comprendre les deux solutions avant de les calculer.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Retirer π effectue un demi-tour et change généralement la position sur le cercle. Pour conserver la position, on ajoute ou retire des multiples de 2π.