Produit scalaire et applications

Première STI2D · spécialité maths · Chapitre 02

Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan

Définition · Comprendre la notion

Dans un repère, les coordonnées d'un point indiquent sa position ; celles d'un vecteur décrivent un déplacement. Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

On soustrait toujours départ à arrivée. Deux vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées correspondantes sont égales. Pour construire l'arrivée B depuis A avec un déplacement $(u ; v)$, ajoute les coordonnées : $B(x_A + u ; y_A + v)$. Ces règles ne demandent pas que le repère soit orthonormé ; les formules de longueur, elles, le demanderont.

Produit scalaire en coordonnées

Définition · Comprendre la notion

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u} = (x ; y)$ et $\vec{v} = (x' ; y')$ est le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Il est symétrique et bilinéaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Le produit d'un vecteur par lui-même vaut le carré de sa norme. Deux vecteurs sont orthogonaux exactement lorsque leur produit scalaire est nul. Le résultat du produit scalaire est un nombre, pas un vecteur.

Relier produit scalaire et angle

Définition · Comprendre la notion

Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$, où $\theta \in [0 ; \pi]$ est leur angle non orienté. Si l'angle est aigu, le produit est positif ; s'il est droit, nul ; s'il est obtus, négatif. La formule permet de calculer un angle en isolant son cosinus, puis en utilisant la fonction réciproque de la calculatrice. Contrôle le mode degré ou radian et garde les valeurs exactes jusqu'au calcul final. La formule divisée par les normes n'est pas utilisable si un vecteur est nul, même si le produit scalaire lui-même reste défini.

Projeter un vecteur sur un axe

Définition · Comprendre la notion

La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe conserve sa composante selon cet axe et supprime la composante perpendiculaire. Si $\vec{e}$ est un vecteur unitaire orientant l'axe, la composante algébrique vaut $\vec{u} \cdot \vec{e} = \|\vec{u}\| \cos\theta$. Cette composante peut être négative : elle indique alors un sens opposé à celui de l'axe. Le vecteur projeté vaut $(\vec{u} \cdot \vec{e})\vec{e}$. On peut lire le produit scalaire comme la norme d'un vecteur multipliée par la projection algébrique de l'autre sur sa direction. Cette interprétation explique le travail nul d'une force perpendiculaire au déplacement.

Longueurs, angles et identité du parallélogramme

Définition · Comprendre la notion

Dans un triangle ABC, le théorème d'Al-Kashi donne

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos(\widehat{BAC}).$$

Il vient de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et du développement du carré de sa norme par bilinéarité. Pour un angle droit, le cosinus est nul et on retrouve Pythagore. La même bilinéarité donne l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned}&\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\\ &= 2\|\vec{u}\|^2\\ &\quad + 2\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Les deux termes croisés s'annulent quand on additionne les développements.

Les repères essentiels

Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan.

1. Identifie le point de départ et le point d'arrivée.
2. Soustrais les coordonnées du départ à celles de l'arrivée, avec des parenthèses pour les valeurs négatives.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute le déplacement aux coordonnées du départ.
4. Pour une figure, écris une égalité de vecteurs avec les bonnes orientations.
5. Contrôle en recalculant la différence ou l'autre paire de côtés.

Produit scalaire en coordonnées.

1. Vérifie que le repère est orthonormé.
2. Si tu pars de points, forme les vecteurs avec arrivée moins départ.
3. Multiplie les coordonnées correspondantes et additionne en gardant les signes.
4. Pour une perpendicularité, impose que la somme soit nulle.
5. Interprète un nombre réel, pas les coordonnées d'un nouveau vecteur.

Relier produit scalaire et angle.

1. Identifie les deux normes, le produit scalaire et l'angle recherché.
2. Écris $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.
3. Isole la grandeur inconnue sans supprimer le cosinus.
4. Pour un angle, contrôle le quotient dans $[-1;1]$ et le mode de la calculatrice.
5. Contrôle aigu, droit ou obtus avec le signe du produit.

Projeter un vecteur sur un axe.

1. Choisis le sens positif de l'axe.
2. Vérifie que son vecteur directeur $\vec{e}$ est unitaire.
3. Calcule la composante $a = \vec{u}\cdot\vec{e}$.
4. Si un vecteur est demandé, calcule $a\vec{e}$.
5. Contrôle que $\vec{u} - a\vec{e}$ est perpendiculaire à l'axe.

Longueurs, angles et identité du parallélogramme.

1. Identifie les deux côtés entourant l'angle connu.
2. Place le côté opposé seul au carré.
3. Calcule les deux carrés et le terme $2ab\cos\theta$.
4. Prends la racine positive à la fin, puis arrondis.
5. Contrôle les inégalités triangulaires et le rôle aigu, droit ou obtus de l'angle.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Un vecteur de norme 10 fait un angle de 60° avec l'axe orienté. Sa composante sur cet axe vaut $10\cos 60^\circ = 5$. Le vecteur projeté est donc $5\vec{e}$.
>
> Si l'angle devient 120°, la composante vaut $10\cos 120^\circ = -5$. La longueur projetée est toujours 5, mais le vecteur projeté est $-5\vec{e}$: il pointe dans le sens opposé à l'orientation choisie.
>
> Cette différence explique pourquoi une composante n'est pas toujours une distance. Pour un axe horizontal orienté vers la droite, une composante -5 représente cinq unités vers la gauche.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Pour un parallélogramme ABCD, compare AB avec DC, pas avec CD. Les côtés opposés de même vecteur doivent être orientés dans le même sens.