Nombres complexes

Première STI2D · spécialité maths · Chapitre 03

Construire les nombres complexes

Définition · Comprendre la notion

On introduit un nombre i tel que $i^2 = -1$. Un complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a et b réels. a est sa partie réelle ; b, sa partie imaginaire. La partie imaginaire est b, pas ib. Les réels correspondent à $b = 0$; les imaginaires purs à $a = 0$. Deux complexes sont égaux lorsque leurs parties réelle et imaginaire sont respectivement égales. Dans un repère orthonormé direct, z est l'affixe du point $(a ; b)$. Le complexe nul est l'origine. On ne compare pas les complexes avec un ordre « plus grand » analogue à celui des réels.

Addition, multiplication et division

Définition · Comprendre la notion

On additionne séparément parties réelle et imaginaire. Pour multiplier, développe puis remplace i^2 par -1 :

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Pour diviser par $c + id \neq 0$, multiplie numérateur et dénominateur par $c - id$. Le dénominateur devient $c^2 + d^2$, réel strictement positif. Une division par zéro reste impossible. Remets le résultat sous la forme $a + ib$ pour lire ses composantes.

Conjugaison et symétrie

Définition · Comprendre la notion

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$. Les points images sont symétriques par rapport à l'axe réel. On a $z + \overline{z} = 2a$, $z - \overline{z} = 2ib$ et $z\overline{z} = a^2 + b^2$. La conjugaison respecte les opérations : $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ et, si $w \neq 0$, $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$. Un complexe est réel exactement lorsqu'il égale son conjugué ; il est imaginaire pur lorsqu'il est l'opposé de son conjugué.

Module, distance et argument

Définition · Comprendre la notion

Le module de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: la distance du point image à l'origine. On a $|zw| = |z||w|$ et $|z/w| = |z|/|w|$ si $w \neq 0$. Pour deux affixes a et b, la distance AB est $|b - a|$. Le module est positif ou nul et s'annule seulement pour zéro. Un argument d'un complexe non nul est un angle de son vecteur image avec l'axe réel positif. Ses arguments diffèrent d'un multiple entier de 2π. Le nombre nul n'a pas d'argument.

Passer à la forme trigonométrique

Définition · Comprendre la notion

Tout complexe non nul s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z| > 0$ et θ un argument. Depuis $a + ib$, calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis $\cos\theta = a/r$ et $\sin\theta = b/r$. Les deux relations déterminent le quadrant. Dans l'autre sens, les coordonnées sont $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$. La notation exponentielle et les opérations sur les arguments sont travaillées en terminale ; ici on apprend à identifier et représenter les deux formes.

Les repères essentiels

Construire les nombres complexes.

1. Réécris le complexe sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.
2. Lis séparément la partie réelle et le coefficient de i.
3. Pour une égalité, identifie les deux composantes pour former deux équations réelles.
4. Pour une puissance de i, utilise $i^2 = -1$ et le cycle de longueur quatre.
5. Contrôle par substitution ou par les coordonnées du point image.

Addition, multiplication et division.

1. Pour une somme, regroupe séparément les parties réelles et imaginaires.
2. Pour un produit, développe tous les termes puis remplace chaque i^2 par -1.
3. Pour un quotient, vérifie le dénominateur non nul et multiplie par son conjugué en haut et en bas.
4. Sépare le résultat sous la forme $a + ib$.
5. Contrôle un quotient en le remultipliant par le dénominateur initial.

Conjugaison et symétrie.

1. Conserve la partie réelle et inverse seulement le signe du coefficient de i.
2. Utilise somme et différence pour isoler les composantes.
3. Utilise $z\overline{z} = a^2 + b^2$ pour obtenir un réel ou rendre un dénominateur réel.
4. Pour une égalité ou une positivité, reviens aux deux réels a et b.
5. Contrôle avec la symétrie des points images ou en conjuguant une deuxième fois.

Module, distance et argument.

1. Pour un module, identifie les deux composantes réelles et calcule la racine de la somme de leurs carrés.
2. Pour une distance entre points, forme d'abord la différence des affixes.
3. Pour un argument, vérifie que le complexe est non nul.
4. Utilise les signes des composantes et les valeurs de cosinus et sinus pour choisir le quadrant.
5. Annonce un argument modulo 2π et contrôle la cohérence géométrique.

Passer à la forme trigonométrique.

1. Vérifie que le complexe est non nul avant de rechercher une direction.
2. Calcule le module positif $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Forme les deux rapports a/r et b/r.
4. Choisis un angle qui possède à la fois le bon cosinus, le bon sinus et le bon quadrant.
5. Reconstruis les coordonnées pour contrôler la forme trigonométrique.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Calculons $(1+2i)/(1-i)$. Le dénominateur est non nul ; son conjugué est $1+i$. On multiplie en haut et en bas :

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}.$$

Au numérateur, le développement donne

$$\begin{aligned} 1+i+2i+2i^2 &= 1+3i-2 \\ &= -1+3i. \end{aligned}$$

Au dénominateur, $1-i^2=2$. Le quotient est donc $-1/2+(3/2)i$.

Le contrôle donne

$$\begin{aligned} (1-i) &= -1/2+2i+3/2 \\ &= 1+2i. \end{aligned}$$

On retrouve bien le numérateur, ce qui vérifie les signes et la division.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

La partie imaginaire est un nombre réel : pour $5-3i$, elle vaut -3. Le terme $-3i$ est imaginaire pur, mais ce n'est pas la partie imaginaire au sens de la définition.