Dérivées et approximation affine

Première STI2D · spécialité maths · Chapitre 04

Approcher une fonction par sa tangente

Définition · Comprendre la notion

Au voisinage de a, une fonction dérivable vérifie l'approximation

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

La tangente remplace localement la courbe. La variation de sortie est donc environ la pente multipliée par la petite variation d'entrée. Il s'agit d'une approximation, pas d'une égalité exacte. Elle est adaptée à de petits accroissements et doit être contrôlée si l'on s'éloigne du point de départ. La notation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ rappelle l'unité d'un taux de variation.

Dériver une puissance

Définition · Comprendre la notion

Pour un entier naturel n non nul, $(x^n)' = nx^{n-1}$. La règle s'applique aussi à $n = -1$ sur les intervalles où x n'est pas nul : $(1/x)' = -1/x^2$. Le coefficient n descend devant la puissance et l'exposant diminue de 1. Pour un polynôme, on applique cette règle terme à terme. Le domaine doit être annoncé : une puissance entière positive est définie partout ; un exposant négatif interdit zéro. La notation de dérivée peut aussi être $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ lorsque le nom de la variable est utile.

Dériver un produit et un quotient

Définition · Comprendre la notion

Pour deux fonctions dérivables u et v, $(uv)' = u'v + uv'$. Le produit des dérivées seul est incorrect. L'idée vient de la variation du produit : on ajoute et retranche $u(a+h)v(a)$, puis on sépare les deux variations. En divisant par h et en passant à la limite, les deux contributions apparaissent. Si v ne s'annule pas, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Le carré du dénominateur ne dispense pas d'exclure ses zéros du domaine. Identifie clairement u, v et leurs dérivées avant d'appliquer la formule.

Dériver une fonction d'une expression affine

Définition · Comprendre la notion

Si $g(x) = f(ax+b)$, alors $g'(x) = af'(ax+b)$. Le facteur a provient de la vitesse à laquelle l'expression intérieure varie avec x. On dérive la fonction extérieure à son argument, puis on multiplie par la dérivée a de l'intérieur. Le décalage b ne crée pas de facteur supplémentaire. La règle vaut sur le domaine où la composition est définie et dérivable. Elle s'applique aux puissances, aux fonctions trigonométriques et, plus tard, aux exponentielles et logarithmes.

Dériver sinus, cosinus et signaux

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Avec des angles en radians, $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$. Par composition affine, la dérivée de $A\sin(\omega t + \varphi)$ vaut $A\omega\cos(\omega t + \varphi)$; celle de $A\cos(\omega t + \varphi)$ vaut $-A\omega\sin(\omega t + \varphi)$. Le facteur de pulsation modifie l'amplitude de la dérivée. Dans un mouvement, dériver une position donne une vitesse, puis dériver la vitesse donne une accélération. Il faut conserver les unités et la variable utilisée.

Les repères essentiels

Approcher une fonction par sa tangente.

1. Choisis une abscisse a où la fonction et sa dérivée sont connues.
2. Calcule $h = x - a$ avec son signe.
3. Évalue la variation estimée $hf'(a)$.
4. Ajoute-la à $f(a)$ en utilisant un signe d'approximation.
5. Contrôle l'erreur lorsque la valeur exacte ou un encadrement est accessible.

Dériver une puissance.

1. Découpe la somme en termes avec leurs signes.
2. Pour chaque puissance, multiplie par l'exposant puis diminue-le de 1.
3. Conserve le coefficient initial et dérive les constantes en zéro.
4. Réunis les termes obtenus et simplifie.
5. Annonce le domaine, notamment lorsque zéro est interdit.

Dériver un produit et un quotient.

1. Détermine le domaine, en excluant les zéros du dénominateur.
2. Nomme u et v puis calcule leurs dérivées.
3. Applique la formule du produit ou du quotient avec des parenthèses.
4. Simplifie ensuite les expressions.
5. Si possible, contrôle en développant ou en réécrivant la fonction initiale.

Dériver une fonction d'une expression affine.

1. Identifie l'intérieur affine et la fonction extérieure.
2. Calcule la dérivée de l'intérieur, avec son signe.
3. Dérive l'extérieur en conservant son argument.
4. Multiplie les deux contributions.
5. Contrôle éventuellement par développement pour une petite puissance.

Dériver sinus, cosinus et signaux.

1. Vérifie que les angles sont en radians.
2. Conserve l'amplitude et repère la dérivée de l'argument.
3. Dérive sinus en cosinus, ou cosinus en moins sinus.
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Pour une valeur initiale, substitue ensuite $t = 0$ et précise l'unité.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $f(x) = (x^2+1)(3x-2)$, on choisit $u = x^2+1$ et $v = 3x-2$, d'où $u' = 2x$ et $v' = 3$.

La règle donne $f' = 2x(3x-2) + 3(x^2+1)$. En développant,
$6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$.

Un autre chemin consiste à développer d'abord $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$. Sa dérivée terme à terme est aussi $9x^2 - 4x + 3$. Les deux contributions du produit sont donc bien nécessaires.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Ne remplace pas le symbole d'approximation par une égalité. Une pente locale ne décrit pas exactement toute la courbe, même si les premières décimales coïncident.