Primitives et méthode d'Euler

Première STI2D · spécialité maths · Chapitre 05

Comprendre ce qu'est une primitive

Définition · Comprendre la notion

Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Tu remontes d'une vitesse à une position, ou d'un débit à une quantité. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Si F est une primitive, toutes les primitives sont $F + C$, où C est un réel quelconque. La dérivée de C est nulle : une vitesse ne renseigne pas à elle seule sur la position de départ. Trouver une primitive et dériver sont deux opérations différentes. Pour vérifier une proposition, dérive-la et compare terme à terme à la fonction demandée. Le domaine et l'intervalle doivent rester précisés.

Primitives des polynômes

Définition · Comprendre la notion

Pour un entier $n \geq 0$, une primitive de x^n est $x^{n+1}/(n+1)$. On augmente l'exposant de 1 puis on divise par ce nouvel exposant. La formule se contrôle en dérivant. La prise de primitive respecte les sommes et les coefficients constants. Une primitive de $ax^2 + bx + c$ est $ax^3/3 + bx^2/2 + cx$. Ajoute une unique constante C à la fin pour obtenir toutes les primitives. La formule de puissance ne s'applique pas à x^{-1} : le dénominateur deviendrait nul. Ce cas sera traité avec le logarithme népérien en terminale STI2D. Ne confonds pas le nombre constant c avec une constante de primitive C.

Déterminer une primitive avec une condition initiale

Définition · Comprendre la notion

Une condition comme $F(a) = b$ permet de choisir une seule fonction dans la famille $F_0 + C$. Remplace x par a, écris $F_0(a) + C = b$, puis calcule $C = b - F_0(a)$. En mécanique, la vitesse donne la dérivée de la position. La position initiale fixe donc la constante. Si l'on connaît l'accélération, on cherche d'abord la vitesse puis la position, en utilisant une condition adaptée à chaque étape. Vérifie deux choses séparément : la dérivée demandée et la valeur initiale. Une formule peut satisfaire l'une et échouer à l'autre. Précise aussi les unités : intégrer une vitesse en mètres par seconde sur un temps en secondes donne une position en mètres.

Primitives des fonctions trigonométriques

Définition · Comprendre la notion

En radians, une primitive de $\cos x$ est $\sin x$, et une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. Le signe moins compense la dérivée du cosinus. Pour $a \neq 0$, une primitive de $\cos(ax + b)$ est $\sin(ax + b)/a$; une primitive de $\sin(ax + b)$ est $-\cos(ax + b)/a$. Le facteur $1/a$ compense celui produit par la dérivation de l'expression intérieure. Si a = 0, la fonction est constante et se traite comme telle. Les amplitudes multiplicatives restent devant. Ces primitives relient des grandeurs périodiques, par exemple une vitesse sinusoïdale et le déplacement associé.

Approcher une primitive par la méthode d'Euler

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Si $F' = f$ et $F(a) = b$, l'approximation affine donne $F(x+h) \approx F(x) + hf(x)$ pour un petit pas h. On construit donc $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$, à partir de (a, b). Chaque segment utilise la pente au point de départ. Les valeurs y_n approchent F sans être en général exactes. Un pas plus petit améliore souvent le résultat, mais demande davantage de calculs. Un tableur ou une boucle Python automatise les colonnes x, f(x) et y. Calcule la nouvelle ordonnée avec l'ancien x, puis avance x. Compare deux pas et, si une primitive exacte est connue, mesure l'écart au même point final.

Les repères essentiels

Comprendre ce qu'est une primitive.

1. Identifie la fonction f dont tu cherches une primitive.
2. Propose une fonction F à partir des règles connues.
3. Dérive F pour contrôler exactement le résultat.
4. Ajoute C si toutes les primitives sont demandées.
5. Précise l'intervalle de validité et toute condition supplémentaire.

Primitives des polynômes.

1. Pour chaque terme, augmente l'exposant de 1.
2. Divise son coefficient par ce nouvel exposant.
3. Une constante initiale devient un terme en x.
4. Réunis les termes et ajoute une seule constante si nécessaire.
5. Dérive la réponse pour vérifier tous les coefficients.

Déterminer une primitive avec une condition initiale.

1. Cherche la famille des primitives avec une constante C.
2. Remplace la variable par l'abscisse de la condition.
3. Résous l'équation obtenue pour C.
4. Réécris la fonction avec cette constante.
5. Vérifie séparément la dérivée et la valeur imposée.

Primitives des fonctions trigonométriques.

1. Identifie sinus ou cosinus et la pente a de l'argument.
2. Choisis sinus pour primitiver cosinus, ou moins cosinus pour primitiver sinus.
3. Divise par a si a est non nul et conserve l'amplitude.
4. Ajoute C pour la famille, puis applique une éventuelle condition.
5. Dérive pour contrôler le signe et les coefficients.

Approcher une primitive par la méthode d'Euler.

1. Initialise x et y avec le point donné.
2. Calcule la pente f(x) au début du pas.
3. Calcule la nouvelle ordonnée $y + hf(x)$ puis avance x de h.
4. Répète jusqu'à l'abscisse finale prévue.

5. Compare au même point avec un autre pas ou une primitive exacte.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Pour $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$, une primitive de $6x^2$ est $6x^3/3 = 2x^3$. Celle de $-4x$ est $-4x^2/2 = -2x^2$, et celle de 3 est $3x$.
>
> On obtient $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$. Le contrôle donne $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3$, exactement la fonction demandée.
>
> Si toutes les primitives sont demandées, on ajoute $+C$. Le coefficient 3 du terme constant initial devient le coefficient de x ; il ne faut pas le confondre avec cette constante libre C.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Chercher une primitive n'est pas appliquer une deuxième fois les règles de dérivation. Le contrôle consiste au contraire à dériver la réponse pour retrouver la fonction initiale.