Suites arithmétiques et géométriques

Première STMG et STI2D · commun · Chapitre 02

Une suite décrit des étapes

Définition · Comprendre la notion

Une suite associe un nombre u_n à chaque rang entier n. Le rang compte des étapes : jour, mois, rang d'une pièce. u_0 est la valeur initiale si le comptage commence à 0 ; u_1 l'est si le comptage commence à 1. Une formule explicite, par exemple $u_n = 3n + 2$, calcule directement n'importe quel terme. Une relation de récurrence, par exemple $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 2$, calcule le suivant à partir du précédent. Les points $(n ; u_n)$ représentent une évolution discrète ; les valeurs intermédiaires entre les rangs n'ont pas automatiquement un sens.

Ajouter toujours la même quantité

Définition · Comprendre la notion

Une suite est arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ pour une constante r, appelée raison. Entre deux étapes, la différence est donc constante. À partir du rang 0 : $u_n = u_0 + nr$. À partir d'un rang p : $u_n = u_p + (n - p)r$. La formule compte le nombre d'ajouts entre les deux rangs. Si $r > 0$, la suite croît ; si $r < 0$, elle décroît ; si $r = 0$, elle est constante. Ses points sont alignés, mais ses rangs restent entiers. Une hausse d'un montant fixe est arithmétique ; une hausse d'un pourcentage fixe ne l'est généralement pas.

Multiplier toujours par le même facteur

Définition · Comprendre la notion

Une suite est géométrique si $u_{n+1} = qu_n$ pour une constante q, sa raison. Dans ces parcours, on étudie surtout les termes positifs et les raisons strictement positives. Alors $u_n = u_0 q^n$, ou $u_n = u_p q^{n-p}$ à partir d'un autre rang. Une évolution au taux constant t correspond à $q = 1 + t$. Pour $u_0 > 0$, si $q > 1$, la suite croît ; si $0 < q < 1$, elle décroît ; si $q = 1$, elle est constante. Pour reconnaître une suite géométrique à termes non nuls, compare les quotients de termes consécutifs. Une raison de $1{,}04$ signifie une hausse de $4\,\%$.

Choisir le modèle d'évolution

Définition · Comprendre la notion

Une hausse constante en quantité correspond à une suite arithmétique. Une hausse constante en proportion correspond à une suite géométrique. Quand une proportion et un apport fixe coexistent, le modèle peut être $u_{n+1} = qu_n + b$, qui n'est généralement ni arithmétique ni géométrique. Décris précisément l'ordre des opérations : ajouter avant ou après une évolution n'est pas équivalent. Les premiers termes servent à vérifier la cohérence de la règle et à discuter les hypothèses : constance du taux, capacité maximale, arrondi, durée d'observation. La prévision est conditionnelle au modèle.

Calculer des termes et rechercher un seuil

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un algorithme de suite conserve une variable pour le terme courant et une variable pour son rang. Initialise-les avec des valeurs cohérentes, puis applique la règle de passage. Une boucle `for` convient quand le nombre d'étapes est connu. Une boucle `while` convient pour atteindre un seuil, si l'on justifie que ce seuil sera atteint. Attention à l'inégalité : pour le premier terme strictement supérieur à S, continue tant que le terme est inférieur ou égal à S. Un tableau de trace donne les états successifs et permet de vérifier les erreurs de rang.

Les repères essentiels

Une suite décrit des étapes.

1. Détermine ce que représentent le rang, le terme et leurs unités éventuelles.
2. Repère le premier rang et la valeur initiale.
3. Pour une formule explicite, remplace seulement le rang ; pour une récurrence, calcule les termes successivement.
4. Contrôle le nombre de transitions et traduis le rang dans le contexte temporel.

Ajouter toujours la même quantité.

1. Calcule une différence « terme suivant moins terme précédent » pour identifier r.
2. Compte les étapes par une différence de rangs.
3. Applique $u_n = u_p + (n-p)r$ en conservant le signe de r.
4. Si r est inconnue, divise la différence des valeurs par la différence des rangs.
5. Contrôle le résultat avec un terme connu et les contraintes du contexte.

Multiplier toujours par le même facteur.

1. Identifie le facteur multiplicatif q, notamment à partir d'un pourcentage.
2. Compte le nombre de multiplications depuis le rang connu.
3. Applique $u_n = u_p q^{n-p}$; garde la précision jusqu'au dernier calcul.
4. Pour retrouver q, relie les termes connus et utilise les hypothèses de signe.
5. Contrôle un calcul par récurrence et vérifie que la tendance est cohérente.

Choisir le modèle d'évolution.

1. Traduis la phrase d'évolution en opération sur le terme courant.
2. Cherche une différence constante ou un quotient constant, sans confondre ces deux tests.
3. Écris la valeur initiale, la récurrence et, si possible, la formule explicite.
4. Calcule une ou deux étapes à la main pour contrôler l'ordre des opérations.
5. Présente une extrapolation comme une prévision conditionnelle et adapte l'arrondi au contexte.

Calculer des termes et rechercher un seuil.

1. Initialise le rang et le terme de façon cohérente avec l'énoncé.
2. Choisis une répétition comptée pour un rang fixé, ou une boucle conditionnelle pour un seuil.
3. Formule la condition de continuation comme le contraire de l'objectif.
4. Mets à jour le terme puis son rang à chaque passage, et trace quelques étapes.
5. Vérifie la terminaison et contrôle le dernier terme refusé ainsi que le premier accepté.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n + 3$, cherchons le premier terme strictement supérieur à 20. On initialise u à 10 et n à 0. Tant que $u \leq 20$, on ajoute 3 à u puis 1 à n.

La trace donne successivement $(n, u) = (0, 10)$, $(1, 13)$, $(2, 16)$, $(3, 19)$, $(4, 22)$. À 19, l'objectif n'est pas atteint et la boucle continue. À 22, la condition $u \leq 20$ devient fausse ; la boucle s'arrête avec n égal à 4.

La valeur affichée n égale à 4 signifie « quatre mises à jour après l'état initial », tandis que u égale à 22 est le terme obtenu. La croissance de la suite et le contrôle $19 \leq 20 < 22$ justifient que ce rang est le premier.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Dans $u_{n+1} = 2u_n + 1$, remplace u_n par la valeur déjà calculée, pas par n. La suite obtenue en écrivant $2n + 1$ répondrait à une autre définition.