Fonctions et second degré

Première STMG et STI2D · commun · Chapitre 03

Variable, image et antécédent

Définition · Comprendre la notion

Une fonction associe à chaque nombre x de son domaine une unique image $f(x)$. Le domaine indique les valeurs autorisées : une durée peut être positive ; un dénominateur ne peut être nul. Calculer une image consiste à remplacer x dans la formule. Chercher les antécédents de y consiste à résoudre $f(x) = y$ dans le domaine : il peut y avoir aucune, une ou plusieurs solutions. Le point $(x ; y)$ appartient à la courbe exactement lorsque $y = f(x)$. Une table de valeurs donne des points de la courbe ; elle ne décrit pas à elle seule tous les nombres du domaine.

Reconnaître et déterminer une fonction affine

Définition · Comprendre la notion

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$. Sa courbe est une droite ; $b = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine et a est le coefficient directeur. Entre deux abscisses distinctes, $a = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$. C'est un taux de variation constant, avec une unité « unité de sortie par unité d'entrée ». Si $a > 0$, la fonction croît ; si $a < 0$, elle décroît ; si $a = 0$, elle est constante. Lorsque $b = 0$, elle est linéaire et modélise une proportionnalité. Deux droites affines sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

Reconnaître une parabole et ses racines

Définition · Comprendre la notion

Un polynôme du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une parabole ; $c = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine. Une racine est un réel dont l'image est nulle. La forme $a(x - r_1)(x - r_2)$ rend les racines visibles : r_1 et r_2, qui peuvent être égales. Si deux racines sont connues, leur moyenne $(r_1 + r_2)/2$ donne l'abscisse du sommet. Si elles ne sont pas connues, on peut les rechercher graphiquement ou avec un solveur. Le calcul par discriminant n'est pas un attendu de ce parcours. Une parabole peut couper l'axe horizontal deux fois, une seule fois ou aucune fois.

Étudier le signe d'un produit

Définition · Comprendre la notion

Le signe d'un produit s'obtient en combinant les signes de ses facteurs. Deux facteurs de même signe donnent un produit positif ; de signes opposés, un produit négatif. Pour $a(x - r_1)(x - r_2)$ avec $r_1 < r_2$, le signe est celui de a à l'extérieur des racines et le signe opposé entre elles. Aux racines, la valeur est nulle. Si la racine est double, $a(x - r)^2$ garde le signe de a sauf en r, où il vaut 0. Pour une inéquation, écris les intervalles et décide séparément si les racines doivent être incluses.

Modéliser avec le second degré

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un produit de deux grandeurs qui varient avec x conduit souvent au second degré : aire, recette, énergie ou distance modélisée. Définis le domaine à partir du contexte avant d'étudier la parabole. La symétrie permet de repérer le sommet lorsque deux valeurs symétriques ou les racines sont connues. Si $a > 0$, le sommet donne un minimum ; si $a < 0$, un maximum. Sur un domaine restreint, vérifie que le sommet y appartient et compare aussi les bornes. Le modèle décrit les hypothèses données ; il ne prouve pas à lui seul qu'une prévision commerciale ou technique se réalisera.

Les repères essentiels

Variable, image et antécédent.

1. Distingue l'entrée x, la sortie $f(x)$ et le domaine autorisé.
2. Pour une image, remplace x par le nombre donné, avec des parenthèses s'il est négatif, puis respecte les priorités.
3. Pour des antécédents, écris $f(x) = y$ et résous cette équation pour toutes les valeurs possibles.
4. Écarte les solutions hors du domaine et vérifie celles qui restent dans la formule initiale.
5. Pour un point $(a; b)$, contrôle à la fois que a est autorisé et que $f(a) = b$.

Reconnaître et déterminer une fonction affine.

1. Identifie le modèle affine $ax + b$ et le domaine pertinent.
2. À partir de deux points, calcule la différence des ordonnées divisée par celle des abscisses, dans le même ordre.
3. Remplace ensuite x et son image par les coordonnées d'un point pour retrouver b.
4. Contrôle avec le second point. Interprète la pente, sa dimension et la valeur à l'origine.
5. Limite le modèle lorsque le contexte impose un stock positif, une durée ou une capacité.

Reconnaître une parabole et ses racines.

1. Vérifie que le coefficient du carré est non nul.
2. Utilise la forme factorisée et la règle du produit nul pour rechercher les racines.
3. Contrôle le signe des nombres : $x + 2 = x - (-2)$ correspond à la racine -2.
4. Pour construire une expression, conserve le coefficient a ; développe seulement si cela est demandé.
5. Vérifie les racines par substitution et utilise leur moyenne pour l'axe de symétrie.

Étudier le signe d'un produit.

1. Factorise si nécessaire et range les racines dans l'ordre croissant.
2. Détermine le signe de chaque facteur sur chaque intervalle, y compris le coefficient constant.
3. Multiplie les signes et place zéro aux racines.
4. Sélectionne les portions demandées, puis inclus ou exclus les racines selon le caractère large ou strict.

Modéliser avec le second degré.

1. Définis x, son unité et les contraintes avant d'écrire la fonction.
2. Exprime les autres quantités en fonction de x puis construis l'aire, la recette ou le bénéfice.
3. Repère le sommet et le sens des variations à partir d'une forme adaptée.
4. Vérifie si le sommet est autorisé ; sinon, compare les valeurs aux limites permises.

5. Donne la valeur de x et la valeur optimale avec leurs unités, puis contrôle les contraintes.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Étudions $f(x) = -2(x-1)(x-4)$. Si $x < 1$, les deux facteurs variables sont négatifs, leur produit est positif, puis la multiplication par -2 donne un résultat négatif. Pour $1 < x < 4$, les facteurs sont de signes opposés ; leur produit négatif, multiplié par -2, devient positif. Pour $x > 4$, le résultat redevient négatif.

Aux deux bornes,

$$\begin{aligned} f(1) &= f(4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La condition $f(x) \geq 0$ est donc satisfaite entre les racines, bornes comprises : $[1;4]$. Pour la condition stricte $f(x) > 0$, la réponse serait $]1;4[$. En prenant x égal à 2, on obtient $-2 \times 1 \times (-2) = 4 > 0$, ce qui contrôle le signe dans la portion centrale.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

L'image et l'antécédent ne sont pas interchangeables. Si $f(2) = 5$, cela ne permet pas d'affirmer $f(5) = 2$. Le premier nombre est l'entrée et le second la sortie ; inverser la question demande un nouveau raisonnement.