Dérivation, tangentes et optimisation

Première STMG et STI2D · commun · Chapitre 04

Du taux de variation au nombre dérivé

Définition · Comprendre la notion

Entre deux abscisses distinctes a et b, le taux de variation est $(f(b) - f(a))/(b - a)$. C'est la pente de la sécante reliant les deux points de la courbe. Son unité est l'unité de f divisée par celle de x. Quand b se rapproche de a, les pentes peuvent se rapprocher d'une valeur : le nombre dérivé $f'(a)$. Il représente une variation instantanée, et non la valeur de f elle-même. On écrit aussi le taux $(f(a + h) - f(a))/h$ pour $h \neq 0$. L'approche est intuitive ici : le calcul exact permet de comprendre la pente limite sans supposer qu'on peut diviser par zéro.

Écrire l'équation d'une tangente

Définition · Comprendre la notion

Si f est dérivable en a, la tangente à sa courbe au point $(a; f(a))$ est la droite de pente $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Il faut deux informations différentes : la hauteur du point et la pente. Une pente nulle donne une tangente horizontale, mais ne garantit pas à elle seule un maximum ou un minimum. La tangente approche la courbe près du point de contact. Elle peut la traverser ; ce n'est pas obligatoirement une droite ayant un seul point commun avec la courbe.

Dériver les polynômes de degré au plus trois

Définition · Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k. Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Du signe de la dérivée aux variations

Définition · Comprendre la notion

Sur un intervalle, une dérivée positive donne une fonction croissante ; une dérivée négative donne une fonction décroissante. On cherche les zéros de la dérivée puis on étudie son signe entre eux. Un changement de signe de positif à négatif indique un maximum local ; de négatif à positif, un minimum local. Une dérivée nulle sans changement de signe ne suffit pas. Le tableau de variations donne les valeurs aux bornes et aux points critiques. Un extremum global sur un intervalle fermé se détermine en comparant les valeurs possibles, y compris celles des bornes. Le signe de f et celui de sa dérivée décrivent deux choses différentes.

Optimiser une grandeur avec la dérivée

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Une optimisation cherche la plus petite ou la plus grande valeur d'une grandeur sous des contraintes. Choisis la variable, exprime la grandeur par une fonction et détermine son domaine. Étudie la dérivée, ses signes et les valeurs aux points critiques et aux bornes. Reviens ensuite au contexte : une longueur doit rester positive, une production peut être entière, une solution peut être hors du domaine. Un maximum local n'est pas automatiquement le maximum global. Pour un nombre entier d'objets, compare les entiers voisins du meilleur choix continu plutôt que d'arrondir sans contrôle.

Les repères essentiels

Du taux de variation au nombre dérivé.

1. Repère les deux abscisses et leurs images.
2. Calcule variation d'image divisée par variation d'abscisse dans le même ordre.
3. Pour un nombre dérivé, pose $b = a + h$ et impose $h \neq 0$.
4. Développe puis simplifie avant de faire tendre h vers zéro.
5. Interprète la pente et son unité sans la confondre avec une image.

Écrire l'équation d'une tangente.

1. Calcule séparément $f(a)$ et $f'(a)$.
2. Écris $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. Remplace les trois données en conservant les parenthèses.
4. Développe seulement si une forme $mx + p$ est utile.
5. Contrôle le point de contact et le coefficient directeur.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduis la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Du signe de la dérivée aux variations.

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

Optimiser une grandeur avec la dérivée.

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.

5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $f(x) = x^2$ au voisinage de 3, on développe d'abord

$$\begin{aligned} f(3+h) &= (3+h)^2 \\ &= 9 + 6h + h^2. \end{aligned}$$

La variation d'image vaut donc $6h + h^2$.

Pour $h \neq 0$, le taux est $(6h + h^2)/h = 6 + h$. Avec $h = 0{,}1$, il vaut 6,1 ; avec $h = -0{,}1$, il vaut 5,9. En rapprochant h de zéro de part et d'autre, on rapproche le taux de 6.

On conclut $f'(3) = 6$. La valeur de la fonction est pourtant $f(3) = 9$: 9 est une hauteur, 6 une pente. Cette distinction est essentielle pour écrire ensuite une tangente.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une vitesse moyenne sur un intervalle ne donne pas nécessairement la vitesse à l'un de ses instants. De même, un taux moyen positif n'impose pas que la fonction soit croissante partout entre les bornes.