Variables aléatoires et simulations

Première STMG et STI2D · commun · Chapitre 07

Variable et loi de probabilité

Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue. Sa loi liste les valeurs x_i et les probabilités $p_i = P(X = x_i)$. Chaque p_i est entre 0 et 1 et $\sum p_i = 1$. Pour un événement comme $X \geq a$, additionne les probabilités des valeurs qui vérifient la condition.

Espérance

$E(X) = \sum_i x_i p_i$. Elle représente une moyenne théorique sur un grand nombre de répétitions et peut ne pas être une valeur possible de X. Si a, b sont des constantes, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Bernoulli et répétitions

Une épreuve de Bernoulli a deux issues : succès de probabilité p et échec de probabilité $1 - p$. La variable indicatrice vaut 1 pour un succès et 0 sinon ; son espérance est p. Pour des épreuves indépendantes, multiplie les probabilités le long d'un chemin, puis additionne celles des chemins disjoints utiles.

Simuler en Python

`random()` fournit un nombre uniforme dans $[0, 1[$. Le test `random() < p` simule un succès de probabilité p. Répète l'expérience, compte les succès et calcule leur fréquence. Distingue le nombre de répétitions d'une expérience du nombre d'épreuves à l'intérieur de cette expérience.

Échantillons et dispersion

Deux échantillons de même taille peuvent donner des fréquences différentes. Augmenter la taille réduit généralement la dispersion autour de la probabilité, sans imposer une égalité exacte. Compare plusieurs échantillons de même taille, puis plusieurs tailles, en gardant le même modèle.

Exemple

Un gain net vaut 8 euros avec probabilité $1/4$ et −2 euros sinon. $E(X) = 8 \times 1/4 - 2 \times 3/4 = 0{,}50$ euro. Ce résultat décrit la moyenne théorique ; aucun tirage ne rapporte exactement 0,50 euro.

Erreurs à éviter

Vérifie le total des probabilités et le caractère indépendant des répétitions avant de multiplier. Une fréquence simulée n'est pas une probabilité exacte. Un jeu d'espérance positive peut produire une perte sur une session finie.