Fonction exponentielle

Première spécialité · Chapitre 05

Les repères essentiels

Définition · Définition

$\exp$ est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Méthode · Calcul

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y, \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \quad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}.$$

Toujours $\mathrm{e}^x > 0$.

Méthode · Dériver

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et $(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\mathrm{e}^{ax+b}$. Pour un produit, utiliser $u'v + uv'$ puis factoriser l'exponentielle.

Méthode · Variations et équations

$\exp$ est strictement croissante. Ainsi

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \text{ si et seulement si } A = B,$$
$$\mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B \text{ si et seulement si } A < B.$$

Pas besoin de logarithme en Première.

Méthode · Modéliser

Croissance : $C(t) = C_0\mathrm{e}^{kt}$ avec $k > 0$. Décroissance : $C_0\mathrm{e}^{-kt}$. La suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a.

Théorème · Approfondissement

Pour tout x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. La courbe reste au-dessus de sa tangente en 0.

Attention · Les réflexes

Ne jamais donner un signe négatif à e^x ; isoler et factoriser l'exponentielle ; pour une approximation près de 0, utiliser $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$ en annonçant qu'elle est approchée.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Deux conséquences accessibles

En appliquant l'inégalité à x puis à $-x$,

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x.$$

En additionnant, on obtient

$$\boxed{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2.}$$

Cette preuve ne demande ni logarithme, ni convexité : seulement les variations.