Produit scalaire

Première spécialité · Chapitre 07

Les repères essentiels

Définition · Quatre calculs

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \\ &= xx' + yy'.\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser une projection ou

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}.$$

Méthode · Orthogonalité

$$\vec{u}\perp\vec{v} \text{ si et seulement si } \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Choisir la formule la plus adaptée aux données.

Méthode · Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Méthode · Cercle de diamètre

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \text{ si et seulement si } \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Autrement dit, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Théorème · Loi des sinus

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ &= \frac{c}{\sin C} \\ &= 2R.\end{aligned}$$

Méthode · Approfondissement : centres

O est le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre.

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}.$$

L'égalité $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ donne la droite d'Euler pour un triangle non équilatéral. Dans le cas équilatéral, les trois points coïncident.

Attention · Le bon choix de formule

Coordonnées disponibles : $xx' + yy'$. Longueurs et angle : norme-cosinus. Figure avec projection : longueur projetée. Longueurs seules : identité des normes ou Al-Kashi.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Coordonnées du centre de gravité

Pour $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$,

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).}$$

Par exemple, si $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ et $C(0, 3)$, alors $G(2, 1)$.