Probabilités conditionnelles

Première spécialité · Chapitre 09

Les repères essentiels

Définition · Conditionnelle

Si $P(A) > 0$,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Méthode · Arbre pondéré

Somme des branches issues d'un nœ ud : 1. Multiplier le long d'un chemin ; additionner les chemins qui réalisent le même événement.

Méthode · Probabilités totales

Pour une partition (A_i) avec $P(A_i) > 0$,

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Méthode · Indépendance

A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si $P(A) > 0$, cela revient à $P_A(B) = P(B)$.

Méthode · Inverser

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Refaire l'arbre et calculer d'abord $P(B)$; ne jamais permuter simplement les indices.

Méthode · Bernoulli et simulation

Jusqu'à quatre essais identiques indépendants : poids p ou $1 - p$ à chaque branche ; lister les chemins favorables. Une fréquence observée approche une probabilité lorsque le nombre de répétitions augmente, mais fluctue d'une exécution à l'autre.

Attention · Le point à vérifier

$P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont deux questions différentes. Indépendants ne signifie pas incompatibles. Dans une marche aléatoire, les pas peuvent être indépendants alors que la position dépend de toute l'histoire.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Tester l'indépendance

On modélise deux lancers par les quatre issues équiprobables PP, PF, FP, FF. A : « pile au 1re lancer », B : « pile au 2e lancer ».

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ (un seul cas PP sur 4). Comme $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, A et B sont **indépendants** : le premier lancer n'influe pas sur le second.