Variables aléatoires

Première spécialité · Chapitre 10

Les repères essentiels

Définition · Loi

Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue. Sa loi donne les valeurs x_i et leurs probabilités p_i, avec $p_i \geqslant 0$ et $\sum p_i = 1$.

Méthode · Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Moyenne théorique de la loi, pas résultat garanti d'une réalisation.

Méthode · Linéarité

Sans hypothèse d'indépendance :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Méthode · Variance et écart-type

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$
$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X),$$
$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

Méthode · Échantillons

Un échantillon contient n valeurs ; on répète l'expérience N fois. Calculer la proportion des moyennes telles que

$$|m - \mu| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Méthode · Décider

Comparer les espérances pour la moyenne et les écarts-types pour la dispersion ; lire aussi la loi pour les probabilités de perte.

Attention · Les contrôles indispensables

La somme des probabilités vaut 1 ; une variance n'est jamais négative ; l'écart-type a la même unité que X ; une simulation fluctue et ne remplace pas un calcul exact.

Un exemple pour se repérer

Exemple · La somme de deux dés

On lance indépendamment deux dés équilibrés et X est la **somme** des deux faces. Alors $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. Par exemple l'événement $\{X = 4\}$ regroupe les résultats $(1,3), (2,2), (3,1)$, donc

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{3}{36} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

L'événement $\{X \leqslant 3\}$ regroupe $(1,1), (1,2), (2,1)$, donc

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 3) &= \frac{3}{36} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$