Calculs et proportions au quotidien

Seconde professionnelle · Chapitre 01

Garder des unités cohérentes

Définition · Comprendre la notion

Une mesure associe un nombre à une unité. Changer d'unité ne change pas la grandeur : on change le nombre qui la décrit. Pour les longueurs, chaque passage entre deux unités métriques voisines multiplie ou divise par 10 ; pour les aires, par 100 ; pour les volumes, par 1 000. Ainsi $1\,\text{m}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$ et $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$. Dans une formule, harmonise les unités avant de remplacer les lettres. Un résultat doit garder son unité et un ordre de grandeur plausible. Une durée décimale ne s'écrit pas comme une heure sur une horloge : $1{,}5$ h signifie une heure et une demi-heure.

Proportion, pourcentage et base de comparaison

Définition · Comprendre la notion

La proportion d'une partie dans un ensemble vaut $p = \dfrac{\text{effectif de la partie}}{\text{effectif total}}$. Elle est comprise entre 0 et 1. Le pourcentage correspondant est $100p\,\%$. Inversement, connaître une proportion p et un total N donne un effectif pN. Prends le bon dénominateur : « parmi les abonnés » signifie que seuls les abonnés forment le total. Pour une sous-population dans une sous-population, les proportions se multiplient : si $40\,\%$ des clients sont abonnés et $25\,\%$ des abonnés sont étudiants, les étudiants abonnés représentent $0{,}40 \times 0{,}25 = 10\,\%$ des clients.

Évolutions successives et réciproques

Définition · Comprendre la notion

Le taux d'évolution de $V_i \neq 0$ vers V_f est $t = (V_f - V_i)/V_i$. Une hausse a un taux positif ; une baisse, un taux négatif. Le coefficient multiplicateur est $c = 1 + t$: $V_f = V_i(1 + t)$. Pour plusieurs évolutions, multiplie les coefficients, puis retire 1 : $t_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1$. Pour revenir à la valeur initiale, utilise $c_{\text{retour}} = 1/c$, d'où $t_{\text{retour}} = 1/(1 + t) - 1$. Une augmentation de 20 points d'un pourcentage n'est pas une augmentation de $20\,\%$ de sa valeur.

Transformer une expression sans changer sa valeur

Définition · Comprendre la notion

Développer remplace un produit par une somme : $a(b + c) = ab + ac$. Factoriser fait l'inverse : $ab + ac = a(b + c)$. Les parenthèses sont indispensables lorsque le facteur multiplie toute une somme. Les identités $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ donnent des transformations utiles. Dans une fraction, on simplifie des facteurs communs, jamais des termes d'une somme. Le dénominateur doit rester non nul. Une formule peut être réorganisée pour isoler une grandeur, en appliquant la même opération des deux côtés.

Lire une condition et justifier une conclusion

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un intervalle décrit tous les nombres compris entre des bornes. Dans $[2;5[$, 2 est inclus et 5 exclu. « Et » demande deux conditions simultanées : c'est une intersection. « Ou » accepte au moins l'une des conditions : c'est une réunion, qui peut inclure les deux à la fois. Une implication « si A, alors B » n'autorise pas automatiquement « si B, alors A ». Un exemple peut illustrer une règle, mais ne prouve pas qu'elle est toujours vraie. Un seul contre-exemple suffit, en revanche, à réfuter une affirmation universelle.

Les repères essentiels

Garder des unités cohérentes.

1. Nomme la grandeur cherchée : longueur, aire, volume, durée ou débit. Écris l'unité demandée.
2. Pars d'une égalité d'unités connue. Pour une aire ou un volume, applique le carré ou le cube au facteur des longueurs.
3. Convertis les données dans des unités compatibles avant de les remplacer dans la formule.
4. Effectue le calcul en gardant son unité, puis contrôle par une conversion inverse et un ordre de grandeur.

Proportion, pourcentage et base de comparaison.

1. Écris en mots la population de référence et la partie étudiée. Repère chaque expression « parmi ».
2. Traduis le pourcentage en nombre décimal en le divisant par 100.
3. Utilise la relation partie = proportion multipliée par total et isole la grandeur demandée.
4. Pour des sous-populations, effectue les étapes dans l'ordre avant de rapporter le résultat au total initial.
5. Contrôle que la partie ne dépasse pas le total et retrouve les données par le calcul inverse.

Évolutions successives et réciproques.

1. Identifie la valeur initiale et la valeur finale dans le sens de la question.
2. Pour un taux, calcule variation divisée par valeur initiale. Pour appliquer un taux, convertis-le en coefficient $1 + t$.
3. Pour des évolutions successives, multiplie les coefficients sans arrondir les valeurs intermédiaires.
4. Pour le retour, prends l'inverse du coefficient global. Retire 1 pour obtenir un taux.
5. Vérifie sur un prix ou une quantité simple, puis interprète le signe et l'unité du résultat.

Transformer une expression sans changer sa valeur.

1. Repère la structure : somme, produit, quotient ou égalité. Respecte les parenthèses et les priorités.
2. Pour développer, distribue le facteur à tous les termes. Pour factoriser, écris chaque terme comme le produit du facteur commun par ce qui reste.
3. Réduis seulement les termes de même nature : termes en x, en carré de x, constantes.
4. Pour résoudre un produit nul, annule séparément chaque facteur. Pour isoler une grandeur, applique la même opération aux deux membres.
5. Contrôle par redéveloppement ou remplacement dans l'expression initiale ; indique toute valeur interdite.

Lire une condition et justifier une conclusion.

1. Reformule les contraintes en phrases. Sépare l'hypothèse donnée et la conclusion à établir.
2. Pour un intervalle, contrôle chaque borne puis un point intérieur et un point extérieur.
3. Pour une affirmation universelle, cherche les cas limites ; un contre-exemple doit satisfaire les hypothèses.
4. Pour prouver, utilise une écriture générale ou une propriété qui s'applique à tous les cas autorisés.
5. Ne déduis pas une réciproque sans un nouveau raisonnement.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Un prix de 80 euros augmente de 10 %, puis baisse de 10 %.

1. La hausse représente $80 \times 0{,}10 = 8$ euros. Le prix devient $80 + 8 = 88$ euros, ce que résume $80 \times 1{,}10 = 88$.
2. La baisse porte maintenant sur 88 euros. Elle représente $88 \times 0{,}10 = 8{,}80$ euros, donc le prix final est $88 - 8{,}80 = 79{,}20$ euros.
3. Le coefficient global vaut $1{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}99$. On retrouve $80 \times 0{,}99 = 79{,}20$.
4. Le taux global est $0{,}99 - 1 = -0{,}01$, soit une baisse de 1 %. On n'annonce pas « 99 % de baisse » : 99 % est la part du prix initial conservée.

Comprendre l'écart. On a ajouté 8 euros puis retiré 8,80 euros, donc perdu 0,80 euro. Le rapport $0{,}80/80 = 0{,}01$ confirme la baisse globale.

Un retour exact. Pour revenir de 88 à 80 euros, il faudrait multiplier par $80/88 = 1/1{,}10$, soit un taux d'environ $-9{,}09\,\%$. La base du retour est le prix augmenté.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Le facteur des aires n'est pas celui des longueurs. Un carré d'un mètre de côté contient cent petits carrés par ligne et cent lignes, donc dix mille carrés d'un centimètre de côté. Cette représentation explique le facteur sans devoir mémoriser une règle isolée.