Probabilités et fluctuations

Seconde professionnelle · Chapitre 03

Modéliser une expérience aléatoire

Définition · Comprendre la notion

Une expérience aléatoire a un résultat inconnu à l'avance, appelé issue. L'univers rassemble les issues possibles ; un événement est un ensemble d'issues. Une probabilité est comprise entre 0 et 1. La probabilité de l'univers vaut 1 et celle de l'événement impossible vaut 0. Dans un univers fini où les issues sont équiprobables, $P(A) = \text{nombre d'issues favorables} / \text{nombre d'issues possibles}$.
L'équiprobabilité doit être justifiée par le modèle, par exemple un dé équilibré ou un tirage uniforme. Dire « il y a deux possibilités » ne signifie pas que leurs probabilités valent chacune $1/2$.

Combiner des événements

Définition · Comprendre la notion

L'événement contraire $\overline{A}$ contient toutes les issues qui ne sont pas dans A, d'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. L'intersection $A \cap B$ signifie « A et B » ; la réunion $A \cup B$ signifie « A ou B, éventuellement les deux ». Pour éviter de compter deux fois l'intersection,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Des événements incompatibles n'ont aucune issue commune et leur intersection est vide. Ils ne doivent pas être confondus avec des événements indépendants, notion qui décrit une absence d'influence probabiliste.

Dénombrer avec un tableau ou un arbre

Définition · Comprendre la notion

Pour plusieurs étapes, un tableau à double entrée ou un arbre permet de lister les issues sans oubli ni répétition. Si une première étape offre a possibilités et la seconde b possibilités pour chacune, il y a ab couples. L'ordre peut compter : avec deux dés distingués, $(1;2)$ et $(2;1)$ sont deux issues différentes.
Les sommes obtenues ne sont pas équiprobables même si les couples le sont. Un tirage avec remise conserve la composition ; sans remise, elle change. Décris le modèle avant de choisir l'univers et les probabilités.

Simuler et estimer une probabilité

Définition · Comprendre la notion

Une simulation traduit un modèle aléatoire en instructions. Les résultats d'une simulation ne remplacent pas les hypothèses : un programme peut simuler fidèlement un modèle inadapté. Sur N répétitions, la fréquence d'un événement est le nombre de réalisations divisé par N. Elle varie d'une série à l'autre. Quand N augmente, elle a tendance à se stabiliser autour de la probabilité, sans devenir nécessairement exacte ni s'en rapprocher à chaque nouvelle observation. En Python, `randint(1,6)` peut simuler un dé équilibré ; `random()` donne un uniforme entre 0 et 1. Fixer une graine aide à reproduire un résultat, pas à le rendre plus juste.

Observer les fluctuations d'échantillonnage

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un échantillon de taille n contient n observations réalisées selon un protocole. Répéter ce protocole produit des fréquences différentes : c'est la fluctuation d'échantillonnage. Pour étudier cette fluctuation, simule N échantillons de même taille n, calcule une fréquence par échantillon et représente la série obtenue. Ne confonds pas n, taille d'un échantillon, avec N, nombre d'échantillons. À modèle fixé et avec des tirages indépendants, augmenter n réduit généralement la dispersion des fréquences. L'étendue observée reste dépendante de la simulation et du nombre d'échantillons ; elle n'est pas un intervalle garanti pour toutes les expériences futures.

Les repères essentiels

Modéliser une expérience aléatoire.

1. Décris les issues possibles et précise le modèle de tirage.
2. Justifie l'équiprobabilité avant d'utiliser un simple dénombrement.
3. Liste exactement les issues favorables, en respectant les mots comme « strictement ».
4. Divise le nombre favorable par le nombre total, puis simplifie.
5. Contrôle que la valeur est dans $[0; 1]$ et interprète-la dans le contexte.

Combiner des événements.

1. Traduis « et », « ou », « aucun » et « au moins un » avec des événements précis.
2. Cherche si le contraire est plus simple à calculer.
3. Pour une réunion, repère l'intersection pour corriger le double comptage.
4. Vérifie si les événements sont disjoints avant d'additionner sans correction.
5. Contrôle les bornes et, si possible, les issues ou l'événement complémentaire.

Dénombrer avec un tableau ou un arbre.

1. Décris les étapes et indique si les objets ou les positions sont distingués.
2. Construis un tableau ou un arbre pour lister les issues sans répétition.
3. Justifie l'équiprobabilité des issues élémentaires avant de les compter.
4. Regroupe seulement ensuite les issues favorables à l'événement demandé.
5. En cas de tirage sans remise, actualise la composition après chaque étape.

Simuler et estimer une probabilité.

1. Décris le modèle, l'événement recherché et la méthode de tirage simulé.
2. Initialise le compteur avant la boucle et fixe un nombre entier positif d'essais.
3. Produis une nouvelle issue à chaque essai et incrémente seulement en cas de succès.
4. Divise le total des succès par le nombre d'essais après la boucle.
5. Compare la fréquence à la théorie et répète la simulation pour observer la fluctuation.

Observer les fluctuations d'échantillonnage.

1. Identifie n, taille d'un échantillon, et N, nombre d'échantillons.
2. Calcule une fréquence pour chacun des N groupes.
3. Résume ou représente ces fréquences pour examiner leur dispersion.
4. Pour comparer des tailles, garde le même modèle et des tirages indépendants.

5. Présente les extrêmes comme observés et distingue événement rare et événement impossible.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Sur un dé équilibré, A est l'événement pair : $\{2; 4; 6\}$. B est l'événement strictement supérieur à 4 : $\{5; 6\}$. L'intersection contient seulement 6 et la réunion contient 2, 4, 5, 6.

Le calcul de la réunion donne

$$\begin{aligned} 3/6 + 2/6 - 1/6 &= 4/6 \\ &= 2/3. \end{aligned}$$

Sans la soustraction, la face 6 serait comptée deux fois. Le dénombrement direct des quatre faces de la réunion vérifie le résultat.

Le contraire de la réunion contient 1 et 3, donc sa probabilité vaut $2/6 = 1/3$. La somme $2/3 + 1/3 = 1$ fournit un second contrôle.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

« Deux possibilités » ne signifie pas « une chance sur deux ». Vérifie le nombre et le poids des issues à l'intérieur de chaque possibilité.