Équations, tarifs et fonctions affines

Seconde professionnelle · Chapitre 04

Résoudre une équation du premier degré

Définition · Comprendre la notion

Résoudre une équation signifie chercher toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles les deux membres sont égaux. Ajouter ou retrancher le même nombre aux deux membres conserve les solutions. Multiplier ou diviser les deux membres par un nombre non nul les conserve aussi. Pour $ax + b = c$ avec $a \neq 0$, soustrais b, puis divise par a : $x = (c - b)/a$. Dans un problème, définis l'inconnue et son unité avant d'écrire l'égalité ; vérifie ensuite que la solution répond aux contraintes de la situation.

Résoudre une inéquation et respecter les bornes

Définition · Comprendre la notion

Une inéquation compare deux expressions : ses solutions forment souvent un intervalle. Ajouter une même valeur aux deux membres conserve le sens de comparaison. Multiplier ou diviser par un nombre positif conserve aussi ce sens ; par un nombre négatif, il faut l'inverser. Ainsi $-2x \leq 6$ équivaut à $x \geq -3$. Le signe large $\leq$ inclut la borne ; le signe strict $<$ l'exclut. Si une quantité doit être entière et positive, il faut encore tenir compte de cette contrainte après la résolution.

Reconnaître et déterminer une fonction affine

Définition · Comprendre la notion

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$. Sa courbe est une droite ; $b = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine et a est le coefficient directeur. Entre deux abscisses distinctes, $a = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$. C'est un taux de variation constant, avec une unité « unité de sortie par unité d'entrée ». Si $a > 0$, la fonction croît ; si $a < 0$, elle décroît ; si $a = 0$, elle est constante. Lorsque $b = 0$, elle est linéaire et modélise une proportionnalité. Deux droites affines sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

Croiser deux contraintes

Définition · Comprendre la notion

Un système de deux équations demande de satisfaire les deux simultanément. Graphiquement, ses solutions correspondent aux intersections des deux droites. La substitution consiste à isoler une inconnue dans une équation puis à remplacer cette expression dans l'autre. L'élimination additionne des équations convenablement multipliées pour faire disparaître une inconnue. Deux droites parallèles distinctes n'ont aucune intersection ; deux droites confondues ont une infinité de points communs. Un résultat numérique lu sur un graphique doit être contrôlé dans les deux équations.

Choisir un tarif avec une fonction

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour comparer deux offres, exprime leur coût avec la même variable et les mêmes unités. Un coût fixe et un coût par unité conduisent souvent à une fonction affine. L'égalité des deux coûts donne un seuil d'indifférence. Une inégalité indique de quel côté du seuil une offre est moins chère. Le modèle doit préciser sa durée, ses frais inclus et les contraintes d'entiers. Une pente plus petite ne garantit pas le meilleur tarif pour une faible consommation : le coût fixe peut être plus élevé.

Les repères essentiels

Résoudre une équation du premier degré.

1. Définis l'inconnue, son unité et ses contraintes. Traduis les données en une égalité.
2. Développe les parenthèses si nécessaire et regroupe les termes de même nature.
3. Ajoute ou soustrais la même expression des deux côtés pour isoler le terme inconnu.
4. Divise par son coefficient non nul. Écris les calculs intermédiaires et conserve une valeur exacte si possible.
5. Remplace la valeur obtenue dans les deux membres de l'équation initiale, puis interprète-la.

Résoudre une inéquation et respecter les bornes.

1. Écris la grandeur cherchée et ses contraintes, puis traduis exactement « au plus », « moins de », « au moins » ou « plus de ».
2. Isole l'inconnue par les mêmes opérations sur les deux membres.
3. Avant chaque multiplication ou division, identifie le signe du facteur. Un facteur négatif inverse l'inégalité.
4. Écris l'intervalle avec les bonnes bornes, puis limite-le aux valeurs possibles dans le contexte.
5. Teste la frontière et une valeur de chaque côté ; pour un maximum entier, vérifie aussi l'entier suivant.

Reconnaître et déterminer une fonction affine.

1. Identifie le modèle affine $ax + b$ et le domaine pertinent.
2. À partir de deux points, calcule la différence des ordonnées divisée par celle des abscisses, dans le même ordre.
3. Remplace ensuite x et son image par les coordonnées d'un point pour retrouver b.
4. Contrôle avec le second point. Interprète la pente, sa dimension et la valeur à l'origine.
5. Limite le modèle lorsque le contexte impose un stock positif, une durée ou une capacité.

Croiser deux contraintes.

1. Nomme les deux inconnues et écris une équation par information indépendante.
2. Choisis la substitution lorsqu'une inconnue est déjà isolée ou facile à isoler.
3. Choisis l'élimination lorsqu'une addition ou une soustraction peut annuler une inconnue ; multiplie si nécessaire tous les termes d'une équation.
4. Résous l'équation obtenue, puis retrouve la seconde inconnue dans une équation initiale.
5. Vérifie le couple dans les deux équations et contrôle les contraintes d'entiers, de signe ou d'unité.

Choisir un tarif avec une fonction.

1. Définis la quantité et son domaine : entière ou réelle, positive, éventuellement plafonnée.
2. Traduis chaque partie du prix et vérifie si une formule change après un forfait.

3. Écris une égalité pour un seuil ou une inégalité pour un choix strict.
4. Résous, puis adapte le résultat au domaine et compare les coûts de chaque côté du seuil.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Deux offres facturent $A(n) = 20 + 2n$ et $B(n) = 5n$ euros pour n utilisations. L'égalité s'écrit $20 + 2n = 5n$. On soustrait $2n$ aux deux membres : $20 = 3n$, puis on divise par 3 : $n = 20/3$, soit environ $6{,}67$.
>
> Pour savoir de quel côté A est avantageuse, on résout directement $20 + 2n < 5n$, soit $20 < 3n$, donc $n > 20/3$. Pour un nombre entier d'utilisations, A devient moins chère à partir de 7 utilisations. On contrôle autour du changement : à 6, A coûte 32 euros et B 30 euros ; à 7, A coûte 34 euros et B 35 euros. Les deux essais confirment le sens du résultat et le premier entier retenu.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Une équation peut ne pas avoir de solution ou en avoir plusieurs selon sa forme. La formule de résolution de $ax + b = c$ exige $a \neq 0$. Si a vaut zéro, il reste une égalité entre nombres : elle est soit fausse pour toute valeur de x, soit vraie pour toutes les valeurs autorisées.