Fonctions, courbes et variations

Seconde professionnelle · Chapitre 05

Variable, image et antécédent

Définition · Comprendre la notion

Une fonction associe à chaque nombre x de son domaine une unique image $f(x)$. Le domaine indique les valeurs autorisées : une durée peut être positive ; un dénominateur ne peut être nul. Calculer une image consiste à remplacer x dans la formule. Chercher les antécédents de y consiste à résoudre $f(x) = y$ dans le domaine : il peut y avoir aucune, une ou plusieurs solutions. Le point $(x ; y)$ appartient à la courbe exactement lorsque $y = f(x)$. Une table de valeurs donne des points de la courbe ; elle ne décrit pas à elle seule tous les nombres du domaine.

Lire une courbe et un tableau de variations

Définition · Comprendre la notion

Sur une courbe, lis une image en partant de l'axe horizontal puis en rejoignant la courbe et l'axe vertical. Pour un antécédent, pars au contraire de la valeur verticale. Une fonction croissante donne des images qui augmentent quand l'entrée augmente ; une fonction décroissante donne des images qui diminuent. Un tableau de variations résume cette évolution sur des intervalles. Une flèche décrit toutes les valeurs intermédiaires, pas seulement les extrémités. Un maximum est une plus grande valeur atteinte ; il faut distinguer sa valeur de l'abscisse où il est atteint. Les graduations et les unités commandent la lecture ; une lecture graphique reste généralement approchée.

La fonction carré

Définition · Comprendre la notion

La fonction carré est $f(x) = x^2$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle, et paire : $f(-x) = f(x)$. Sa courbe est une parabole symétrique par rapport à l'axe vertical. Elle décroît sur $]-\infty ; 0]$, puis croît sur $[0 ; +\infty[$; son minimum 0 est atteint en 0. Pour $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$. Pour $a = 0$, elle a une seule solution ; pour $a < 0$, aucune solution réelle. Une longueur doit être positive : le contexte peut donc écarter la racine négative.

Décaler et multiplier une courbe

Définition · Comprendre la notion

Ajouter une constante k à une fonction décale verticalement toutes ses images de k : la courbe de $f + k$ est celle de f translatée vers le haut si $k > 0$ et vers le bas si $k < 0$. Multiplier une fonction par un réel a multiplie toutes ses ordonnées par a. Si $a > 0$, le sens des variations est conservé ; si $a < 0$, il est inversé. Pour $a = 0$, la nouvelle fonction est constante. Pour ax^2, le sommet reste l'origine. Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Ces transformations permettent de lire un modèle sans refaire une table entière.

Résoudre avec des courbes

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Résoudre $f(x) = k$ consiste à chercher les abscisses où la courbe rencontre la droite horizontale $y = k$. Résoudre $f(x) = g(x)$ consiste à chercher les abscisses de leurs intersections. Pour $f(x) \leq g(x)$, repère les portions où la première courbe est sous la seconde, en incluant les intersections. Un graphique donne souvent une valeur approchée. Un solveur ou un balayage numérique permet d'affiner ; une substitution contrôle le résultat. Il faut rechercher toutes les intersections dans le domaine. Un zoom trop limité peut masquer une autre solution.

Les repères essentiels

Variable, image et antécédent.

1. Distingue l'entrée x, la sortie $f(x)$ et le domaine autorisé.
2. Pour une image, remplace x par le nombre donné, avec des parenthèses s'il est négatif, puis respecte les priorités.
3. Pour des antécédents, écris $f(x) = y$ et résous cette équation pour toutes les valeurs possibles.
4. Écarte les solutions hors du domaine et vérifie celles qui restent dans la formule initiale.
5. Pour un point $(a ; b)$, contrôle à la fois que a est autorisé et que $f(a) = b$.

Lire une courbe et un tableau de variations.

1. Lis les axes, les unités et l'échelle avant de relever une coordonnée.
2. Pour une image, pars de l'abscisse ; pour des antécédents, pars de l'ordonnée et cherche toutes les rencontres.
3. Pour comparer des images sans formule, vérifie que les entrées sont dans un même intervalle de monotonie.
4. Pour un extremum global, examine toutes les portions et leurs extrémités, puis distingue valeur et position.
5. Précise si la lecture est exacte, approchée ou insuffisante pour conclure à l'unicité.

La fonction carré.

1. Identifie exactement la base élevée au carré ; ajoute des parenthèses pour une substitution négative.
2. Ramène une équation à $x^2 = a$, puis distingue les cas $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$.
3. Pour une inégalité, utilise les variations du carré et les deux bornes opposées.
4. Applique les contraintes du contexte et vérifie l'effet de tout arrondi.

Décaler et multiplier une courbe.

1. Écris la relation exacte entre la nouvelle fonction et la fonction connue.
2. Transforme les images dans l'ordre indiqué, sans changer les entrées.
3. Pour les variations, regarde le signe du facteur multiplicatif ; une addition seule ne les change pas.
4. Calcule les images des bornes et du point de changement, puis limite l'étude au domaine.

Résoudre avec des courbes.

1. Identifie les deux courbes à comparer et vérifie le domaine ainsi que la fenêtre.
2. Relève les abscisses de toutes les intersections visibles sur ce domaine.
3. Pour une inégalité, repère les intervalles où la bonne courbe est au-dessus, puis traite les bornes.

4. Indique la précision de lecture ; si nécessaire, encadre numériquement et justifie l'unicité.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Résolvons $x^2 < 9$. Les deux nombres dont le carré vaut 9 sont -3 et 3. Entre ces nombres, la distance à zéro est inférieure à 3 : le carré est inférieur à 9. En dehors, cette distance dépasse 3 et le carré dépasse 9. L'ensemble des solutions est donc $]-3;3[$. Les bornes sont exclues parce que l'inégalité est stricte.

Si x est maintenant le côté, en mètres, d'un carré d'aire inférieure à 9 mètres carrés, on ajoute $x \geq 0$ pour un modèle autorisant une aire nulle, ce qui donne $[0;3[$. Pour un carré non dégénéré, il faut $x > 0$ et l'on retient $]0;3[$. La résolution algébrique précède ainsi l'interprétation géométrique.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

L'image et l'antécédent ne sont pas interchangeables. Si $f(2) = 5$, cela ne permet pas d'affirmer $f(5) = 2$. Le premier nombre est l'entrée et le second la sortie ; inverser la question demande un nouveau raisonnement.