Géométrie, mesures et volumes

Seconde professionnelle · Chapitre 06

Longueurs, périmètres et aires

Définition · Comprendre la notion

Le périmètre mesure le contour, l'aire mesure la surface. Pour un rectangle de côtés L et l, $P = 2(L + l)$ et $A = Ll$. Pour un triangle de base b et de hauteur h correspondante, $A = bh/2$; la hauteur est perpendiculaire à la base. Pour un disque de rayon r, le périmètre est $2\pi r$ et l'aire πr^2. Le diamètre vaut $2r$. Les angles d'un triangle totalisent $180°$. Décompose une figure complexe en formes connues, additionne ou soustrais les aires et garde les unités cohérentes. Une aire en mètres carrés ne se convertit pas comme une longueur.

Calculer une longueur et vérifier un angle droit

Définition · Comprendre la notion

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés. L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit et le plus long. Pour calculer un petit côté, soustrais les carrés puis prends la racine positive. Pour vérifier qu'un triangle est rectangle, utilise la réciproque : si le carré du plus grand côté est égal à la somme des deux autres carrés, l'angle opposé au plus grand côté est droit. Un dessin peut suggérer un angle droit sans le prouver. Dans une mesure réelle arrondie, l'égalité exacte doit être distinguée de la tolérance acceptée.

Utiliser une configuration de Thalès

Définition · Comprendre la notion

Dans un triangle ABC, si M appartient à AB, N à AC et MN est parallèle à BC, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les côtés correspondants doivent garder le même ordre. La proportionnalité permet de calculer une longueur manquante. Réciproquement, des rapports égaux avec les points dans le même ordre permettent de prouver le parallélisme. Il faut vérifier la configuration, pas appliquer des rapports sur n'importe quelle figure. Les triangles obtenus sont semblables, avec un coefficient d'agrandissement ou de réduction commun aux longueurs.

Reconnaître des solides et calculer leur volume

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un pavé droit a pour volume Llh ; un cube d'arête a a pour volume a^3. Pour un prisme droit ou un cylindre, le volume est aire de base multipliée par hauteur ; pour le cylindre, $V = \pi r^2 h$. Pour une pyramide ou un cône, $V = Bh/3$ où B est l'aire de la base. Pour une boule de rayon r, $V = 4\pi r^3/3$. Ces dernières formules sont rappelées lorsqu'elles sont utilisées. La hauteur est perpendiculaire à la base, même si une perspective donne une impression différente. Un solide composé peut être décomposé en volumes sans chevauchement ; un trou se soustrait. Les volumes utilisent des unités cubiques ; $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3$.

Agrandir une figure ou un solide

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Une transformation de rapport positif k multiplie les longueurs par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3. Ces puissances viennent du nombre de dimensions multipliées : une aire est un produit de deux longueurs, un volume de trois. Le rapport doit être le même dans toutes les directions pour appliquer ces règles. Une échelle 1:s signifie qu'une longueur sur le dessin correspond à s fois cette longueur dans la réalité, avec les mêmes unités. Un changement d'échelle conserve les angles et les rapports de longueurs, mais pas les mesures d'aire ou de volume.

Les repères essentiels

Longueurs, périmètres et aires.

1. Précise si la question porte sur une longueur de contour ou une aire.
2. Identifie les formes et les dimensions utiles, notamment rayon et hauteur perpendiculaire.
3. Convertis les longueurs dans une même unité.
4. Calcule chaque partie, puis additionne ou soustrais selon la figure.
5. Garde une valeur exacte si possible et contrôle l'unité ainsi que l'ordre de grandeur.

Calculer une longueur et vérifier un angle droit.

1. Justifie que le triangle est rectangle, ou annonce que tu testes la réciproque.
2. Identifie l'hypoténuse ou le plus grand côté.
3. Écris l'égalité symbolique des carrés avant les calculs.
4. Isole le carré recherché puis prends la racine positive.
5. Vérifie l'égalité obtenue, l'unité et la cohérence avec le plus grand côté.

Utiliser une configuration de Thalès.

1. Vérifie les alignements, l'ordre des points et le parallélisme donné ou recherché.
2. Associe les côtés correspondants des deux triangles.
3. Écris tous les rapports dans le même sens.
4. Calcule le coefficient ou la longueur par proportionnalité.
5. Contrôle l'ordre de grandeur ; pour une preuve de parallélisme, cite la réciproque après vérification des hypothèses.

Reconnaître des solides et calculer leur volume.

1. Identifie le solide et sa formule de volume.

2. Repère rayon ou diamètre, aire de base et hauteur perpendiculaire.
3. Convertis toutes les longueurs dans une même unité avant le produit.
4. Additionne ou soustrais les volumes utiles, en conservant une valeur exacte si possible.
5. Convertis l'unité cubique ou la capacité et contrôle la taille du résultat.

Agrandir une figure ou un solide.

1. Identifie le rapport dans le sens départ vers arrivée et vérifie qu'il est uniforme.
2. Distingue longueur, aire et volume.
3. Utilise respectivement k, k^2 ou k^3.
4. Si le rapport de surface ou de volume est donné, retrouve k avec la racine adaptée.
5. Contrôle les unités et le sens agrandissement ou réduction.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Un réservoir cylindrique de rayon 0,5 m et de hauteur 2 m a une base d'aire $\pi(0{,}5)^2 = 0{,}25\pi$ mètre carré. Le volume est donc $0{,}25\pi \times 2 = 0{,}5\pi$ mètre cube.
>
> La valeur exacte est conservée avant la conversion : un mètre cube vaut 1 000 litres, donc le volume vaut 500π litres, soit environ 1 570,8 litres.
>
> Le rayon est élevé au carré avant la multiplication par la hauteur. Utiliser 0,5 sans carré calculerait un autre produit avec une unité incorrecte. Un contrôle dimensionnel retrouve bien une aire de base multipliée par une longueur.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Le diamètre n'est pas le rayon, et un côté oblique n'est pas automatiquement une hauteur. Repère les dimensions géométriques avant de remplacer les lettres dans une formule.