Variations et extrémums

Seconde générale · Chapitre 08

Les repères essentiels

Définition · Mots essentiels

Sur un intervalle I :

- f croissante : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$;
- f décroissante : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$;
- maximum M : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$ et M est atteint ;
- minimum m : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$ et m est atteint.

Propriété · Fonction affine

Pour $f(x) = mx + p$:

- si $m > 0$, f est croissante ;
- si $m < 0$, f est décroissante ;
- si $m = 0$, f est constante.

La preuve repose sur

$$f(b) - f(a) = m(b - a).$$

Méthode · Optimiser

1. Choisir l'inconnue.
2. Déterminer son domaine.
3. Exprimer la grandeur à optimiser.
4. Étudier ses variations ou faire apparaître un carré.
5. Donner la valeur optimale, l'endroit où elle est atteinte et l'unité.

Propriété · Références

- x^2 : décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$;
- $1/x$: décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$;
- $\sqrt{x}$: croissante sur $[0;+\infty[$;
- x^3 : croissante sur $\mathbb{R}$.

Attention · Trois réflexes

- Ne pas comparer avec des variations si les nombres ne sont pas dans un même intervalle de monotonie.
- Ne pas confondre l'extremum, qui est une valeur, et l'abscisse où il est atteint.
- Le numérique suggère ou confirme ; seule une démonstration prouve.

Intuition · La phrase qui guide

Un tableau de variations raconte le trajet des *valeurs* de la fonction quand les *abscisses* avancent de gauche à droite.

Capacités à vérifier : lire, justifier, optimiser.

Sans les aides : cherche le maximum de $9-(x-1)^2$ sur $[2;5]$, puis explique pourquoi le sommet complet ne suffit pas. Reprends ensuite la pause sur le domaine pour vérifier ta démarche.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Une preuve courte

Soit $f(x)=3x-7$. Pour $a<b$,

$$f(b)-f(a)=3b-7-(3a-7)=3(b-a)>0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.