Suites géométriques et sommes

Terminale professionnelle · Chapitre 03

Multiplier toujours par le même facteur

Définition · Comprendre la notion

Une suite est géométrique si $u_{n+1} = qu_n$ pour une constante q, sa raison. Dans ces parcours, on étudie surtout les termes positifs et les raisons strictement positives. Alors $u_n = u_0 q^n$, ou $u_n = u_p q^{n-p}$ à partir d'un autre rang. Une évolution au taux constant t correspond à $q = 1 + t$. Pour $u_0 > 0$, si $q > 1$, la suite croît ; si $0 < q < 1$, elle décroît ; si $q = 1$, elle est constante. Pour reconnaître une suite géométrique à termes non nuls, compare les quotients de termes consécutifs. Une raison de $1{,}04$ signifie une hausse de $4\,\%$.

Additionner une suite géométrique

Définition · Comprendre la notion

Pour $q \neq 1$ et $N \geq 1$,

$$1 + q + \cdots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Multiplier la somme par q décale tous les termes ; soustraire fait disparaître les termes intermédiaires. Pour N termes à partir de u_p, on obtient $S = u_p(1 - q^N)/(1 - q)$. Si $q = 1$, tous les termes sont égaux et $S = Nu_p$: la fraction précédente n'est pas définie. Cette formule calcule une accumulation de quantités successives, par exemple une production ou des versements. Il faut identifier la date du premier versement et le nombre de termes.

Choisir le modèle d'évolution

Définition · Comprendre la notion

Une hausse constante en quantité correspond à une suite arithmétique. Une hausse constante en proportion correspond à une suite géométrique. Quand une proportion et un apport fixe coexistent, le modèle peut être $u_{n+1} = qu_n + b$, qui n'est généralement ni arithmétique ni géométrique. Décris précisément l'ordre des opérations : ajouter avant ou après une évolution n'est pas équivalent. Les premiers termes servent à vérifier la cohérence de la règle et à discuter les hypothèses : constance du taux, capacité maximale, arrondi, durée d'observation. La prévision est conditionnelle au modèle.

Déterminer la première étape qui satisfait une condition

Définition · Comprendre la notion

Un seuil sur une suite peut être recherché avec une table, un programme ou une inéquation. Une croissance ou une décroissance justifiée permet de parler du premier rang. Pour une suite arithmétique, on résout une inéquation du premier degré puis on choisit un entier. Pour une suite géométrique, une table convient ; lorsque les logarithmes sont connus, ils permettent aussi de résoudre l'inéquation. Dans tous les cas, vérifie le rang retenu et le rang précédent. La distinction entre $>$ et $\geq$ change parfois la réponse.

Suites géométriques au tableur

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un tableur peut placer les rangs dans la colonne A et les valeurs dans B. La ligne 2 contient le rang 0 et la valeur initiale. La ligne 3 calcule le terme suivant ; recopier la formule prolonge la suite. Une référence relative change lors de la recopie ; une référence absolue, écrite avec des signes dollar, conserve sa cellule. Les logiciels francophones utilisent souvent la virgule décimale et les anglophones le point. Vérifie les trois premiers résultats à la main avant de recopier cent lignes.

Les repères essentiels

Multiplier toujours par le même facteur.

1. Identifie le facteur multiplicatif q, notamment à partir d'un pourcentage.
2. Compte le nombre de multiplications depuis le rang connu.
3. Applique $u_n = u_p q^{n-p}$; garde la précision jusqu'au dernier calcul.
4. Pour retrouver q, relie les termes connus et utilise les hypothèses de signe.
5. Contrôle un calcul par récurrence et vérifie que la tendance est cohérente.

Additionner une suite géométrique.

1. Identifie le premier terme a, la raison q et le nombre N de termes.
2. Si $q = 1$, calcule Na ; sinon, utilise $a(1 - q^N)/(1 - q)$.
3. Respecte les parenthèses et calcule la puissance avant les soustractions.
4. Conserve les décimales utiles et annonce la règle d'arrondi.
5. Contrôle par une addition courte ou par un encadrement cohérent du total.

Choisir le modèle d'évolution.

1. Traduis la phrase d'évolution en opération sur le terme courant.
2. Cherche une différence constante ou un quotient constant, sans confondre ces deux tests.
3. Écris la valeur initiale, la récurrence et, si possible, la formule explicite.
4. Calcule une ou deux étapes à la main pour contrôler l'ordre des opérations.
5. Présente une extrapolation comme une prévision conditionnelle et adapte l'arrondi au contexte.

Déterminer la première étape qui satisfait une condition.

1. Écris précisément l'inégalité demandée et le domaine des rangs.
2. Contrôle les variations et la possibilité d'atteindre le seuil.
3. Résous l'inégalité ou calcule les termes jusqu'au franchissement.
4. Choisis le premier entier autorisé, en respectant le signe strict ou large.
5. Vérifie le rang retenu et le précédent, puis traduis le rang en date ou en nombre d'étapes.

Suites géométriques au tableur.

1. Saisis le rang zéro et la valeur initiale sur la même ligne.
2. Écris la formule de récurrence dans la ligne suivante.
3. Garde relative la référence au terme précédent et fige les paramètres.
4. Vérifie trois valeurs à la main puis recopie.
5. Contrôle le rang final et le nombre de termes de toute somme.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 1{,}1u_n$, on place 0 en A2 et 100 en B2. Dans un tableur utilisant la virgule décimale, B3 reçoit `=B2*1,1`.

La recopie en B4 produit `=B3*1,1`. Les valeurs sont 100, 110 puis 121. Les quotients $110/100$ et $121/110$ valent 1,1 ; en revanche les augmentations 10 puis 11 ne sont pas constantes.

Si le taux de $10\ \%$ est enregistré dans D1, la formule devient `=B2*(1+$D$1)`. Saisir 10 au lieu de $10\ \%$ multiplierait par 11 : vérifier dès les premières lignes permet de repérer cette confusion.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une baisse de 8 pour cent correspond au facteur 0,92, pas 0,08. Le facteur multiplicatif représente la part qui reste ; le taux de baisse représente la part perdue.