Fonctions polynômes de degré trois

Terminale professionnelle · Chapitre 04

La fonction cube et ses transformations

Définition · Comprendre la notion

La fonction cube est $f(x) = x^3$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, strictement croissante, et son signe est celui de x. Sa courbe passe par l'origine et admet une tangente horizontale en ce point. Son taux de variation local est donné par $f'(x) = 3x^2$. Cette dérivée ne change pas de signe au passage par zéro : il n'y a donc pas d'extremum en zéro. Tout réel y possède un unique antécédent par la fonction cube, appelé racine cubique. Contrairement à un carré, un cube peut être négatif. Un facteur devant le cube ou un décalage modifie la courbe et doit être pris en compte.

Dériver les polynômes de degré au plus trois

Définition · Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k. Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique

Définition · Comprendre la notion

Un polynôme de degré trois s'écrit $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. Ses zéros se recherchent par lecture graphique, factorisation disponible, test d'une valeur proposée ou outil numérique. S'il est donné sous forme de produit, un zéro annule au moins un facteur. Tester une racine consiste à remplacer x et vérifier que le résultat est zéro. Une courbe cubique peut avoir un, deux ou trois zéros réels distincts ; une racine peut être répétée. Il n'est pas nécessaire de mémoriser une formule générale de résolution du troisième degré. Un balayage ou solveur doit être contrôlé et ne pas masquer une autre racine.

Étudier les variations d'une fonction cubique

Définition · Comprendre la notion

La dérivée d'un polynôme de degré trois est un polynôme de degré deux. Après dérivation, cherche ses racines avec la forme disponible ou un outil numérique, puis étudie son signe. Une forme factorisée de la dérivée permet un tableau de signes ; ce tableau donne les variations de la fonction initiale. Calcule les images des points critiques et des bornes du domaine. Les zéros de f ne sont pas les zéros de sa dérivée. Un cubique peut avoir deux extrema locaux, ou rester croissant sur tout l'intervalle étudié. La conclusion doit correspondre au domaine professionnel ou technique imposé.

Optimiser un modèle cubique

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un coût ou un volume peut être modélisé par un polynôme cubique. L'optimisation suit la même méthode : domaine, dérivée, signes, valeurs candidates, interprétation. La dérivée quadratique peut avoir deux racines ; toutes celles qui appartiennent au domaine doivent être examinées. Si les racines sont données numériquement, conserve assez de précision pour comparer les valeurs. Pour une production entière, teste les entiers proches de chaque candidat continu et les bornes. Le modèle reste conditionnel à ses hypothèses ; une extrapolation hors de la plage de production ne constitue pas une prévision fiable.

Les repères essentiels

La fonction cube et ses transformations.

1. Identifie exactement la quantité élevée au cube.
2. Conserve le signe pour une puissance impaire.
3. Dans une équation, isole x^3 avant de chercher x.
4. Utilise la stricte croissance pour justifier l'unicité.
5. Vérifie la solution dans l'expression initiale.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduis la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique.

1. Écris l'équation $f(x) = 0$.
2. Cherche une factorisation ou utilise celle qui est donnée.
3. Annule chaque facteur et résous les équations simples.
4. Compte les valeurs distinctes, même si un facteur est répété.
5. Vérifie les solutions et distingue annulation et changement de signe.

Étudier les variations d'une fonction cubique.

1. Dérive la fonction et factorise sa dérivée si possible.
2. Ordonne les zéros de la dérivée dans le domaine.
3. Construis les signes des facteurs puis du produit.
4. Traduis ces signes en variations de la fonction initiale.
5. Calcule les images des bornes et points critiques pour conclure sur les extrema.

Optimiser un modèle cubique.

1. Précise le domaine du modèle.
2. Dérive, factorise puis trouve tous les zéros de la dérivée.
3. Étudie le signe de chaque facteur, coefficient compris.
4. Calcule les valeurs aux candidats autorisés et aux bornes.

5. Compare et interprète la meilleure valeur réalisable.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $x^3 = -27$, on reconnaît $(-3)^3 = -27$: l'unique solution est -3. Il faut conserver le signe négatif, possible pour une puissance impaire.

Pour calculer l'image de -2 par $g(x) = 2x^3 + 1$, on effectue d'abord le cube : $(-2)^3 = -8$. On multiplie ensuite par 2, puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned} g(-2) &= -16 + 1 \\ &= -15. \end{aligned}$$

Calculer $(2 \times (-2) + 1)^3$ donnerait une autre expression. Les parenthèses et l'ordre des opérations précisent ce qui est élevé au cube : ici seulement x.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

La règle « deux racines opposées » concerne certaines équations avec un carré. Un cube égal à un réel possède toujours une seule solution réelle.