# Intérêts composés et emprunts

Terminale professionnelle · Chapitre 06

## Les intérêts composés

**Définition · Comprendre la notion**

À intérêts composés, les intérêts sont ajoutés au capital à chaque période. Avec un capital initial C et un taux périodique t constant, le capital après n périodes est $C_n = C(1+t)^n$. La suite des capitaux est géométrique de raison $1+t$. Les intérêts gagnés pendant la période n se calculent sur le capital au début de cette période ; les intérêts cumulés valent $C_n - C$. Le modèle suppose ici aucun versement ni retrait, aucun frais ni taxe et un taux constant. Des flux supplémentaires exigent une récurrence qui précise leur date. Un taux annuel et un nombre de mois ne se combinent pas sans conversion de période.

## Taux équivalents en capitalisation

**Définition · Comprendre la notion**

Deux taux sont équivalents s'ils donnent le même coefficient global sur une même durée. Pour un taux annuel effectif t et un taux mensuel i, $(1+i)^{12} = 1+t$, donc $i = (1+t)^{1/12} - 1$. Réciproquement, un taux mensuel i donne un taux annuel effectif $(1+i)^{12} - 1$. Diviser le taux annuel par 12 donne un taux proportionnel, généralement différent. Un contrat peut exprimer un taux nominal annuel avec un taux périodique proportionnel : lis la convention annoncée. Ne confonds pas ce calcul mathématique avec un coût total de crédit incluant frais et assurance. Garde plusieurs décimales dans le taux intermédiaire et arrondis seulement la présentation finale.

## Emprunt à amortissement constant

**Définition · Comprendre la notion**

Un remboursement se décompose en intérêts et amortissement du capital. Pour un capital emprunté C remboursé en n périodes avec amortissement constant, la part de capital remboursée à chaque échéance vaut $A = C/n$. Les intérêts de la période k sont $iD_{k-1}$, où i est le taux périodique et $D_{k-1}$ la dette au début de cette période. L'échéance vaut $A + iD_{k-1}$ ; la dette restante devient $D_k = D_{k-1} - A$. Les intérêts et les échéances diminuent puisque la dette diminue. La somme des amortissements doit égaler C et la dette finale doit être nulle. Les exemples supposent les échéances en fin de période, sans frais ni assurance, avec un éventuel ajustement de centimes à la dernière ligne.

## Emprunt à échéances constantes

**Définition · Comprendre la notion**

Pour un capital C, un taux périodique $i > 0$ et n remboursements égaux A en fin de période, $A = Ci/[1-(1+i)^{-n}]$. Si i = 0, la formule se remplace par $A = C/n$. Le tableau utilise $I_k = iD_{k-1}$, l'amortissement $M_k = A - I_k$, puis

$$\begin{aligned} D_k &= D_{k-1} - M_k \\ &= (1+i)D_{k-1} - A. \end{aligned}$$

Les intérêts diminuent et la part de capital augmente. Le mot annuité désigne une échéance annuelle ; pour des mois, on parle de mensualité et on emploie un taux mensuel cohérent. Le modèle suppose ici absence de frais, d'assurance et de paiement initial. Conserve A non arrondie dans le calcul théorique ; un échéancier monétaire arrondi peut ajuster la dernière échéance.

## Comparer des financements

**Définition · Comprendre la notion**

Pour comparer des offres, fixe le même capital réellement disponible, la même durée et les mêmes dates de paiement. Calcule le total des remboursements, les frais et les assurances indiqués, puis soustrais le capital reçu pour obtenir le coût dans le périmètre retenu. Une mensualité plus faible peut simplement provenir d'une durée plus longue et coûter davantage au total. Un taux affiché seul ne suffit pas si les frais diffèrent. Les exercices ne calculent un taux global réglementaire que si la méthode et tous les flux sont explicitement fournis. Un tableau de comparaison doit séparer coût total et contrainte de trésorerie. Une offre moins coûteuse peut demander des paiements plus élevés. La conclusion doit donc répondre au critère demandé et annoncer les éléments non inclus.

## Les repères essentiels

**Les intérêts composés.**

1. Identifie la période du taux et le nombre de capitalisations.
2. Vérifie les hypothèses : taux constant, frais et éventuels apports ou retraits.
3. Sans autre flux, utilise $C_n = C_0(1+t)^n$ ; avec flux, écris une récurrence qui respecte leur date.
4. Soustrais le capital initial si les intérêts cumulés sont demandés.
5. Contrôle les premières périodes à la main et garde la précision jusqu'à l'arrondi final.

**Taux équivalents en capitalisation.**

1. Précise les périodes comparées et la convention effective ou proportionnelle.
2. Convertis les taux en coefficients multiplicateurs.
3. Pour regrouper des périodes, élève le coefficient à une puissance ; pour partager, prends la racine correspondante.
4. Retire 1 pour retrouver un taux, puis convertis en pourcentage.
5. Contrôle que les deux taux reconstituent le même capital sur la durée commune.

**Emprunt à amortissement constant.**

1. Identifie le capital, le nombre de périodes et le taux périodique cohérent.
2. Calcule l'amortissement constant $A = C/n$.
3. À chaque ligne, calcule les intérêts sur la dette de début de période.

4. Additionne intérêts et amortissement pour l'échéance, puis retire seulement l'amortissement de la dette.
5. Vérifie dette finale nulle, somme des amortissements et décomposition du total payé.

**Emprunt à échéances constantes.**

1. Vérifie le capital, le nombre d'échéances, leur date et le taux de la même période.
2. Calcule A avec la formule si $i > 0$, ou $C/n$ si $i = 0$.
3. Pour chaque ligne, calcule les intérêts puis l'amortissement $A - I_k$.
4. Actualise la dette avec $D_k = (1+i)D_{k-1} - A$.
5. Conserve la précision théorique et vérifie que la dette finale est nulle avant de gérer les centimes.

**Comparer des financements.**

1. Liste le capital reçu et tous les paiements, frais et assurances du périmètre.
2. Vérifie ce qui est inclus ou payé séparément pour éviter les doubles comptes.
3. Calcule le total des sorties puis soustrais le capital reçu.
4. Compare aussi durée, dates et montant périodique.
5. Conclue selon le critère demandé en indiquant les éléments absents ou non comparables.

## Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Un taux composé de 1 pour cent par mois donne le coefficient annuel $1{,}01^{12} \approx 1{,}126825$. Le taux annuel effectif vaut donc environ $0{,}126825$, soit 12,68 pour cent.
>
> Sur 1 000 euros, le capital final est environ 1 126,83 euros. Un taux annuel effectif de 12 pour cent donnerait seulement 1 120 euros : les deux ne sont donc pas équivalents.
>
> La différence vient des capitalisations mensuelles. Pour retrouver le taux mensuel à partir du coefficient annuel exact, on prend sa racine douzième : $(1{,}01^{12})^{1/12} = 1{,}01$. On retire ensuite 1 pour revenir au taux 0,01.

## Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Avec un versement en fin de période, écris $(1+t)C_n + V$. Écrire $(1+t)(C_n + V)$ rémunérerait le versement pendant une période où il n'était pas encore présent.