Vecteurs et repérage dans l'espace

Terminale professionnelle · Chapitre 07

Se repérer avec trois coordonnées

Définition · Comprendre la notion

Dans l'espace, un point M est repéré par trois coordonnées $(x; y; z)$: abscisse, ordonnée, altitude. L'origine est $(0; 0; 0)$. La troisième coordonnée ajoute une direction indépendante des deux premières. Dans un repère orthonormé, les trois axes sont perpendiculaires deux à deux et utilisent la même unité. Pour placer un point, construis ses déplacements suivant les trois axes ; une perspective plane ne conserve pas toutes les longueurs. Un point du plan horizontal de cote h a $z = h$. Deux points peuvent avoir les mêmes abscisse et ordonnée mais des altitudes différentes.

Décrire un déplacement dans l'espace

Définition · Comprendre la notion

Le vecteur de A vers B a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

La règle « arrivée moins départ » se prolonge aux trois dimensions. Pour retrouver B depuis A et un vecteur, on ajoute les trois composantes à celles de A. Deux vecteurs sont égaux si leurs trois coordonnées sont égales. Le vecteur opposé change les trois signes. Un déplacement de cote nulle reste parallèle au plan horizontal, même si ses deux autres coordonnées ne sont pas nulles.

Composer des déplacements dans l'espace

Définition · Comprendre la notion

On additionne les vecteurs de l'espace composante par composante. Multiplier un vecteur par k multiplie ses trois composantes par k. Les règles de Chasles, du vecteur opposé et du vecteur nul restent valables. Un système de déplacements ou de forces peut être résumé par un vecteur résultant. Un équilibre vectoriel exige que chacune des trois composantes de la somme soit nulle. Une norme ne se distribue pas sur une somme en général : additionne les vecteurs avant de calculer une longueur, lorsque c'est cette longueur résultante qui est demandée.

Vérifier une direction dans les trois dimensions

Définition · Comprendre la notion

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si un même réel k transforme toutes les composantes de l'un en celles de l'autre. Choisis une composante non nulle pour trouver k, puis contrôle les deux autres. Deux coordonnées compatibles ne suffisent pas : la troisième peut empêcher la colinéarité. Des points A, B, C sont alignés lorsque AB et AC sont colinéaires. Le calcul se fait dans l'espace entier, pas seulement sur la projection vue à l'écran. Deux trajectoires peuvent paraître alignées sur une vue de dessus tout en ayant des altitudes incompatibles.

Calculer une distance dans l'espace

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Dans un repère orthonormé de l'espace,
>
> $$\|(x;y;z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$
>
> La formule vient de deux applications de Pythagore : une première dans le plan horizontal, une seconde avec la hauteur. Pour une distance AB, utilise les différences des trois coordonnées. La distance directe n'est pas la somme des distances parcourues selon les axes. Elle est positive ou nulle et s'exprime dans l'unité du repère. Pour une diagonale de pavé de dimensions L, l, h, on obtient $\sqrt{L^2+l^2+h^2}$.

Les repères essentiels

Se repérer avec trois coordonnées.

1. Lis les coordonnées dans l'ordre x, y, z et repère les axes du dessin.
2. Interprète chaque signe sur son axe uniquement.
3. Pour une projection verticale, garde x et y puis remplace z par la cote du plan.
4. Pour un centre de pavé aligné sur les axes, prends les moitiés des dimensions.
5. Contrôle la position avec le plan ou les limites du solide.

Décrire un déplacement dans l'espace.

1. Identifie départ et arrivée.
2. Calcule les trois différences arrivée moins départ avec les parenthèses nécessaires.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute les composantes au départ.
4. Compare les trois coordonnées pour une égalité de vecteurs.
5. Contrôle par le déplacement inverse ou par reconstruction du point d'arrivée.

Composer des déplacements dans l'espace.

1. Écris chaque déplacement avec ses trois composantes.
2. Calcule les multiples avant les additions et soustractions.
3. Additionne axe par axe et traite soigneusement les signes.
4. Pour un retour ou un équilibre, prends l'opposé de la résultante.
5. Vérifie la nullité des trois coordonnées ou reconstruis l'expression initiale.

Vérifier une direction dans les trois dimensions.

1. Vérifie les vecteurs nuls et les composantes nulles avant de diviser.
2. Trouve un facteur candidat avec une composante non nulle.
3. Contrôle explicitement les deux autres composantes.
4. Pour des points, calcule deux déplacements de même origine.
5. Conclue dans l'espace complet, sans te limiter à une projection.

Calculer une distance dans l'espace.

1. Vérifie l'hypothèse de repère orthonormé.
2. Calcule le vecteur entre les points si nécessaire.
3. Additionne les carrés des trois composantes puis prends la racine positive.
4. Pour un trajet par étapes, additionne séparément les longueurs de ces étapes.

5. Compare les résultats en précisant les contraintes de déplacement.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $A(1;2;3)$ et $B(4;0;8)$, les différences sont $4-1=3$, $0-2=-2$ et $8-3=5$. Ainsi $\overrightarrow{AB}=(3;-2;5)$.

Le trajet avance de trois unités selon x, recule de deux selon y et monte de cinq selon z. Depuis un autre départ $C(0;0;0)$, le même déplacement aboutirait à $(3;-2;5)$; depuis A, il aboutit bien à B.

Le contrôle depuis A donne $(1+3;2-2;3+5)=(4;0;8)$. Le trajet inverse a pour vecteur $(-3;2;-5)$ et ramène B à A.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une vue de dessus peut superposer deux points d'altitudes différentes. Ne conclus pas à l'égalité des points en comparant seulement leurs deux premières coordonnées.