Équations trigonométriques et Fresnel

Terminale professionnelle · Chapitre 08

Résoudre une équation de cosinus

Définition · Comprendre la notion

L'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution si $a \notin [-1;1]$. Sinon, choisis $\alpha \in [0;\pi]$ tel que $\cos\alpha = a$. Les solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, avec k entier. Sur un intervalle donné, ne conserve que les valeurs qui y appartiennent et évite les doublons aux angles particuliers 0 ou π. Sur $]-\pi;\pi]$, les deux valeurs sont généralement $\pm\alpha$. La borne $-\pi$ est exclue et π incluse. Un cercle aide à visualiser les deux points d'une même abscisse.

Résoudre une équation de sinus

Définition · Comprendre la notion

L'équation $\sin x = b$ n'a pas de solution si $b \notin [-1;1]$. Si $\sin\alpha = b$, ses solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, avec k entier. Les deux points ont la même ordonnée et sont symétriques par rapport à l'axe vertical. Pour une valeur négative, il faut examiner la moitié inférieure du cercle. La touche arcsinus donne une seule valeur principale ; elle ne fournit pas à elle seule toutes les solutions de l'équation. Le filtrage par l'intervalle et la gestion des bornes restent nécessaires.

Chercher les instants où un signal atteint une valeur

Définition · Comprendre la notion

Pour résoudre $A\sin(\omega t + \varphi) = c$, divise d'abord par A, supposé non nul, et pose $\theta = \omega t + \varphi$. Résous $\sin\theta = c/A$ avec les deux familles d'angles, puis reviens à $t = (\theta - \varphi)/\omega$. Garde seulement les instants de l'intervalle étudié. Si $|c| > A$ avec $A > 0$, la valeur est hors de l'amplitude et n'est jamais atteinte. Une recherche sur une seule période peut suffire si l'on réutilise ensuite la périodicité. Les unités de t et de la pulsation doivent être cohérentes.

Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel

Définition · Comprendre la notion

On adopte ici la convention sinus : le signal $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, avec $A \geq 0$, est représenté à l'instant initial par un vecteur de norme A et d'angle φ avec l'axe horizontal. Le vecteur tourne à la pulsation ω ; sa projection verticale donne le signal. Ses coordonnées initiales sont $(A\cos\varphi; A\sin\varphi)$. La somme de vecteurs de Fresnel représente la somme de signaux de même pulsation et de même convention. Il faut annoncer sinus ou cosinus : mélanger les conventions sans conversion introduit un décalage de $\pi/2$.

Additionner des signaux avec Fresnel

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour deux signaux sinusoïdaux de même pulsation, transforme chaque amplitude et phase en coordonnées de Fresnel, puis additionne les coordonnées. La norme du vecteur somme donne l'amplitude résultante ; son angle donne la phase. Deux signaux en phase additionnent leurs amplitudes. En opposition de phase, leurs effets se soustraient. Pour des phases quelconques, les amplitudes seules ne s'additionnent pas. Si le vecteur résultant est nul, le signal somme est nul et sa phase n'a pas de valeur unique. Un logiciel peut déterminer l'angle ; le quadrant doit être vérifié, notamment quand une composante est négative.

Les repères essentiels

Résoudre une équation de cosinus.

1. Isole le cosinus et vérifie que sa valeur imposée appartient à $[-1;1]$.
2. Trouve un angle de référence α dans $[0;\pi]$.
3. Écris les deux familles $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$.
4. Filtre par l'intervalle et supprime les doublons.
5. Substitue les angles retenus et vérifie les bornes ouvertes ou fermées.

Résoudre une équation de sinus.

1. Isole le sinus et vérifie que la valeur cible est entre -1 et 1.
2. Trouve un angle de référence exact ou avec arcsinus en mode radian.
3. Construis les familles $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Ajoute ou retire des tours pour ne garder que les angles du domaine.
5. Contrôle les signes, les bornes et les doublons ; arrondis seulement les résultats finaux.

Chercher les instants où un signal atteint une valeur.

1. Compare la cible à l'amplitude pour exclure une valeur impossible.
2. Divise par le facteur extérieur et pose l'angle complet comme inconnue.
3. Traduis l'intervalle de temps en intervalle d'angles ou écris les familles générales.
4. Résous l'équation trigonométrique puis isole t en conservant la phase.
5. Filtre par l'intervalle temporel, contrôle les bornes et substitue les instants retenus.

Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel.

1. Annonce la convention sinus ou cosinus avant de représenter le signal.
2. Relève l'amplitude positive et la phase initiale.
3. Calcule les coordonnées $(A\cos\varphi ; A\sin\varphi)$.
4. Pour le retour au signal, calcule la norme puis l'angle avec les deux signes.
5. Contrôle la valeur à t égal à zéro par la projection correspondant à la convention.

Additionner des signaux avec Fresnel.

1. Vérifie la même pulsation et la même convention.
2. Convertis chaque amplitude-phase en deux coordonnées.
3. Additionne séparément les composantes.
4. Calcule la norme résultante puis la phase à partir des deux composantes normalisées.

5. Contrôle une valeur instantanée et traite séparément le cas du vecteur nul.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Résolvons $2\sin(\pi t) = 1$ sur $[0;2]$. L'amplitude 2 permet d'atteindre 1. On divise par 2 : $\sin(\pi t) = 1/2$, puis on pose $\theta = \pi t$.

Quand t parcourt $[0;2]$, l'angle parcourt $[0;2\pi]$. Dans cet intervalle, le sinus vaut 1/2 pour $\theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$. La division par π donne $t = 1/6$ ou $t = 5/6$.

Les deux valeurs appartiennent au domaine et la substitution donne $2 \times 1/2 = 1$. La seconde moitié de période a un sinus négatif et ne peut pas fournir la valeur positive demandée. Cela confirme que les deux instants trouvés sont tous les instants possibles.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une valeur d'arccos est seulement un angle de référence. Il faut encore utiliser la symétrie, la périodicité et l'intervalle demandé pour construire toutes les solutions.