Exponentielle et logarithme népérien

Terminale STI2D · spécialité maths · Chapitre 01

La fonction exponentielle de base e

Définition · Comprendre la notion

La fonction exponentielle e^x est la fonction de base e dont la tangente en zéro a une pente égale à 1 ; $e \approx 2{,}71828$. Elle est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est elle-même : $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Elle est donc strictement croissante. Les règles $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, $\mathrm{e}^{-a} = 1/\mathrm{e}^a$ et $\mathrm{e}^0 = 1$ restent celles des puissances. Par composition affine, $(\mathrm{e}^{kx})' = k\mathrm{e}^{kx}$. La croissance dépend du signe de k. L'exponentielle n'est jamais nulle, ce qui simplifie les tableaux de signes.

Limites et modèles exponentiels

Définition · Comprendre la notion

Quand x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$, elle tend vers 0. La courbe a donc l'axe horizontal pour asymptote vers la gauche. Pour e^{kx}, étudie d'abord le signe et la limite de kx. Ainsi, avec $k > 0$, e^{-kx} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Une somme constante plus une exponentielle décroissante peut tendre vers un équilibre non nul. Les opérations simples sur les limites sont utilisables, mais une forme comme $\infty - \infty$ demande une transformation avant de conclure.

Le logarithme népérien

Définition · Comprendre la notion

Pour $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$. Les relations inverses sont $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et $\mathrm{e}^{\ln a} = a$. On a $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ et $\ln(a^r) = r \ln a$ pour a,b positifs. La fonction ln est strictement croissante. Elle tend vers $-\infty$ lorsque son argument tend vers 0 par valeurs positives et vers $+\infty$ quand il tend vers $+\infty$. Les deux logarithmes sont liés par $\log x = \ln x / \ln 10$. Le domaine positif doit être vérifié avant de résoudre une équation ou une inéquation.

Dériver et étudier le logarithme

Définition · Comprendre la notion

Sur $]0; +\infty[$, la dérivée du logarithme népérien est $1/x$. Elle est positive, ce qui confirme la croissance de ln. Les règles de somme, produit et quotient permettent d'étudier des fonctions combinant polynômes et logarithmes. Commence toujours par le domaine. Pour $f(x) = x \ln x$, la règle du produit donne $f'(x) = \ln x + 1$. Le signe de la dérivée se résout alors avec les propriétés du logarithme. À une borne exclue comme zéro, on parle de limite éventuelle, pas d'une valeur de la fonction.

Comparer exponentielle et puissances à l'infini

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour tout entier n strictement positif, lorsque x tend vers $+\infty$, e^x/x^n tend vers $+\infty$ et $x^n\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0. L'exponentielle finit par croître plus vite que toute puissance fixée. Les résultats s'étendent à e^{kx} et e^{-kx} pour un réel k strictement positif. Ils sont des résultats à l'infini : un polynôme peut être plus grand sur une plage finie. Pour utiliser la comparaison, transforme l'expression afin de reconnaître un produit ou quotient de référence. Une écriture $0 \times \infty$ ne permet pas de conclure sans cette comparaison.

Les repères essentiels

La fonction exponentielle de base e.

1. Identifie les exponentielles et leurs exposants.
2. Utilise les règles des puissances pour les produits et quotients.
3. Pour dériver, multiplie par la dérivée de l'exposant.
4. Applique aussi la règle du produit si un autre facteur dépend de x.
5. Utilise la positivité de l'exponentielle pour étudier les signes.

Limites et modèles exponentiels.

1. Détermine la limite de l'exposant.
2. Applique la limite correspondante de l'exponentielle.
3. Traite les facteurs et constantes qui entourent ce terme.
4. Si une forme indéterminée apparaît, transforme avant de conclure.
5. Interprète une limite comme un comportement à long terme.

Le logarithme népérien.

1. Impose la positivité de tout argument de ln.
2. Utilise ln pour retirer une exponentielle, ou l'exponentielle pour retirer ln.
3. Conserve le sens d'une inégalité à cette étape.
4. Résous l'équation restante en surveillant les divisions négatives.
5. Vérifie la solution dans le domaine et dans la relation initiale.

Dériver et étudier le logarithme.

1. Écris le domaine positif imposé par ln.
2. Choisis les règles de somme, produit ou quotient nécessaires.
3. Remplace la dérivée de ln par $1/x$.
4. Pour les variations, simplifie puis résous le signe de la dérivée.
5. Calcule l'image du point critique avec la fonction initiale.

Comparer exponentielle et puissances à l'infini.

1. Identifie une puissance et une exponentielle en concurrence.
2. Réécris une exponentielle négative comme un inverse si cela aide.
3. Pour un exposant kx, pose $t = kx$ en vérifiant $k > 0$.
4. Applique une limite de croissance comparée reconnue.
5. Traite ensuite les constantes et les sommes finies.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $x^3\mathrm{e}^{-2x}$ lorsque $x \to +\infty$, les limites séparées donneraient une forme indéterminée $\infty \times 0$.

Posons $t = 2x$. Alors $t \to +\infty$, $x = t/2$ et $x^3\mathrm{e}^{-2x} = (t^3/8)\mathrm{e}^{-t}$. Le résultat de croissance comparée donne $t^3\mathrm{e}^{-t} \to 0$.

Multiplier par $1/8$ conserve la limite zéro. Le changement de variable justifie précisément l'emploi du résultat malgré le coefficient 2 dans l'exposant.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

L'exposant peut être négatif sans que l'exponentielle le soit. Dans un produit, son signe est toujours positif ; ce sont les autres facteurs qui déterminent le signe final.