Fonctions composées et primitives

Terminale STI2D · spécialité maths · Chapitre 02

Composer des fonctions et contrôler le domaine

Définition · Comprendre la notion

Composer deux fonctions revient à enchaîner deux transformations. Si $f = v \circ u$, alors $f(x) = v(u(x))$: applique u d'abord, puis v au résultat. Le domaine exige que x appartienne au domaine de u et que u(x) appartienne au domaine de v. Un logarithme demande un argument strictement positif ; une racine carrée demande un argument positif ou nul ; un dénominateur doit être non nul. L'ordre compte généralement : $v \circ u$ et $u \circ v$ ne sont pas la même fonction. Décomposer une formule en fonction intérieure et extérieure prépare la dérivation et la recherche de primitives.

La dérivée d'une fonction composée

Définition · Comprendre la notion

Si u est dérivable et v est dérivable aux valeurs prises par u, la composée vérifie $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$. La variation extérieure est multipliée par la variation intérieure. Oublier u' revient à supposer que l'intérieur varie comme x, ce qui est faux en général. Pour un entier n, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ sur le domaine adapté. Pour l'exponentielle, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$. Pour u positive, $(\ln u)' = u'/u$. Écris séparément u, sa dérivée et la dérivée extérieure avant de simplifier.

Étudier les variations d'une composée

Définition · Comprendre la notion

Une dérivée composée peut souvent être factorisée en termes dont le signe est simple. L'exponentielle et un carré strictement positif ne changent pas le signe : concentre-toi sur les autres facteurs. Pour $u > 0$, $(\ln u)' = u'/u$ a le signe de u'. De même, e^u a une dérivée du signe de u'. Cela traduit la croissance des fonctions extérieures ln et exp. Ne généralise pas cette propriété à toute composée : un carré ou un cosinus n'est pas croissant sur tout son domaine. Commence par le domaine, calcule la dérivée, établis son signe puis les variations et les valeurs utiles.

Reconnaître une dérivée composée à l'envers

Définition · Comprendre la notion

Si F est une primitive de f, alors $F(u(x))$ est une primitive de $u'(x)f(u(x))$. Le facteur u' doit être présent, éventuellement à une constante près. On reconnaît notamment $u'\mathrm{e}^u$, de primitive e^u, et $u'u^n$, de primitive $u^{n+1}/(n+1)$ lorsque la formule est définie et $n \neq -1$. Une exponentielle composée sans le bon facteur intérieur ne possède pas nécessairement une primitive exprimable par les formules usuelles. Ne force pas la reconnaissance. La dérivation de la réponse reste le contrôle décisif.

Primitives de la forme u'/u

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Sur un intervalle où u est strictement positive et dérivable, une primitive de u'/u est $\ln u$. En particulier, une primitive de $1/x$ sur $]0;+\infty[$ est $\ln x$. Sur un intervalle où u est strictement négative, on peut employer $\ln(-u)$; la notation $\ln|u|$ rassemble les deux situations, sans autoriser le passage par un zéro de u. Repère le dénominateur, calcule sa dérivée et compare au numérateur. Si le facteur manquant est constant, ajuste-le. Si ce n'est pas le cas, cette méthode immédiate ne s'applique pas.

Les repères essentiels

Composer des fonctions et contrôler le domaine.

1. Identifie l'opération intérieure puis l'opération extérieure.
2. Vérifie que l'intérieur est défini.
3. Impose les contraintes de l'extérieur à la valeur intérieure.
4. Résous simultanément les conditions obtenues.
5. Pour une valeur, effectue les opérations dans l'ordre des parenthèses.

La dérivée d'une fonction composée.

1. Vérifie le domaine de dérivabilité de la composée.
2. Identifie u et calcule u'.
3. Dérive l'extérieur puis remplace son argument par u.
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Simplifie et contrôle un coefficient ou un cas particulier.

Étudier les variations d'une composée.

1. Vérifie le domaine de la fonction.
2. Applique la règle de la chaîne.
3. Factorise et identifie les facteurs toujours positifs.
4. Établis les signes restants puis les variations.
5. Évalue la fonction aux points critiques et contrôle les extrema.

Reconnaître une dérivée composée à l'envers.

1. Repère une expression intérieure u.
2. Calcule u' et compare-la au facteur présent.
3. Ajuste uniquement par un coefficient constant si nécessaire.
4. Applique la primitive de la forme reconnue.
5. Dérive toute la réponse pour vérifier qu'aucun facteur variable ne manque.

Primitives de la forme u'/u.

1. Repère le dénominateur u et son domaine de signe constant.
2. Calcule u' puis compare au numérateur.
3. Ajuste par une constante si le rapport est constant.
4. Utilise ln u, ln(-u) ou lnlul sur l'intervalle adapté.
5. Ajoute la constante nécessaire puis contrôle par dérivation.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Pour $6x/(x^2+4)$, le dénominateur $u = x^2+4$ est strictement positif sur les réels. Sa dérivée vaut $2x$.
>
> Le numérateur $6x$ vaut trois fois cette dérivée. Une primitive est donc $F(x) = 3\ln(x^2+4)$. En dérivant, $F'(x) = 3 \times 2x/(x^2+4)$, ce qui redonne la fraction.
>
> On n'applique pas la règle des puissances avec un exposant -1, car elle demanderait de diviser par zéro. C'est précisément le logarithme qui traite cette forme particulière.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Un logarithme négatif peut être un dénominateur valide. Pour $1/\ln x$, il faut exclure un logarithme nul, et non tous les logarithmes négatifs.