Intégrales, aires et valeurs moyennes

Terminale STI2D · spécialité maths · Chapitre 03

Comprendre une intégrale comme une accumulation

Définition · Comprendre la notion

Pour une fonction continue positive sur $[a;b]$, avec $a<b$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ mesure l'aire sous la courbe dans les unités du repère. Elle additionne une infinité de petites contributions. Si f prend des valeurs négatives, l'intégrale est une aire algébrique : les zones sous l'axe contribuent négativement. L'aire géométrique totale demande de séparer les intervalles de signe et de prendre chaque aire positive. Si f représente une vitesse, l'intégrale donne le déplacement ; si f est un débit, elle donne une quantité. Multiplie les unités de f par celles de x. Une intégrale est un nombre, alors qu'une primitive est une fonction.

Calculer une intégrale avec une primitive

Définition · Comprendre la notion

Si f est continue sur $[a;b]$ et F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. On note aussi $[F(x)]_a^b$ cette différence. La constante d'une primitive disparaît dans la soustraction : n'importe quelle primitive convient. Respecte l'ordre valeur finale moins valeur initiale, et mets des parenthèses autour de chacune si la formule comporte plusieurs termes. Un contrôle de signe ou d'ordre de grandeur permet de détecter une erreur. Si f est positive et $a<b$, le résultat doit être positif. Conserve les expressions exactes avant l'approximation numérique.

Propriétés et comparaisons des intégrales

Définition · Comprendre la notion

L'intégrale respecte la linéarité : $\int(af+bg)=a\int f+b\int g$, avec les mêmes bornes. La relation de Chasles donne $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$. Inverser les bornes change le signe : $\int_b^a f=-\int_a^b f$. Avec des bornes identiques, l'intégrale est nulle. Si $f\le g$ sur $[a;b]$ et $a<b$, alors $\int_a^b f\le\int_a^b g$. En particulier, si $m\le f\le M$, l'intégrale est comprise entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. Ces propriétés permettent des calculs sans connaître de primitive explicite. Elles n'autorisent pas à séparer un produit en produit d'intégrales.

Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition · Comprendre la notion

Sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$, la valeur moyenne de f est $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Le rectangle de hauteur m et de largeur $b-a$ a la même aire algébrique que sous la courbe. La moyenne a les mêmes unités que f, tandis que l'intégrale combine les unités de f et de x. Pour un débit, la moyenne reste un débit ; pour une puissance, elle reste une puissance. La moyenne des deux valeurs aux extrémités est exacte pour une fonction affine, mais pas pour une fonction quelconque. Une moyenne sur deux intervalles doit être pondérée par leurs durées.

Approcher une intégrale numériquement

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Découpe $[a;b]$ en n intervalles de largeur $h=(b-a)/n$. La somme des rectangles à gauche est $h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$; à droite, utilise les points de rang 1 à n. Pour une fonction croissante, la somme à gauche sous-estime l'intégrale et celle à droite la surestime. Pour une fonction décroissante, les rôles s'inversent. Augmenter n améliore l'approximation pour une fonction continue. La méthode de Monte-Carlo estime aussi une aire : pour $0 \leq f \leq M$, tire des points uniformément dans le rectangle de dimensions $b-a$ et M. La proportion sous la courbe multipliée par l'aire du rectangle estime l'intégrale. Le résultat fluctue ; davantage de points réduit généralement cette fluctuation.

Les repères essentiels

Comprendre une intégrale comme une accumulation.

1. Identifie l'intervalle et sa largeur $b-a$.
2. Repère le signe de la fonction sur chaque portion.
3. Calcule les aires simples par la géométrie si possible.
4. Pour l'intégrale, donne un signe aux contributions sous l'axe.
5. Pour une aire géométrique, additionne les valeurs positives et précise les unités.

Calculer une intégrale avec une primitive.

1. Vérifie que la fonction est continue sur l'intervalle.
2. Cherche une primitive et contrôle-la par dérivation.
3. Calcule séparément F(b) et F(a).
4. Soustrais dans l'ordre $F(b)-F(a)$ avec des parenthèses.
5. Contrôle signe, ordre de grandeur et unités avant d'arrondir.

Propriétés et comparaisons des intégrales.

1. Vérifie et aligne les bornes des intégrales connues.
2. Utilise Chasles pour découper ou reconstituer un intervalle.
3. Utilise la linéarité pour les sommes et coefficients constants.
4. Intègre une constante en la multipliant par la largeur.
5. Pour un encadrement, multiplie les bornes de la fonction par $b-a$.

Valeur moyenne d'une fonction continue.

1. Identifie l'intervalle et sa largeur.
2. Calcule l'intégrale, c'est-à-dire l'accumulation totale.
3. Divise par la largeur pour obtenir la moyenne.
4. Pour plusieurs périodes, additionne leurs accumulations avant de diviser.
5. Contrôle que la moyenne garde les unités de la fonction et reste entre ses bornes.

Approcher une intégrale numériquement.

1. Calcule $h=(b-a)/n$.
2. Liste exactement n abscisses gauches ou droites.
3. Évalue la fonction à ces abscisses et additionne les hauteurs.

4. Multiplie par h puis utilise les variations pour interpréter l'erreur.
5. Pour Monte-Carlo, multiplie la proportion observée par l'aire totale du rectangle.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Si $\int_0^2 f = 5$ et $\int_2^3 f = 4$, Chasles donne

$$\begin{aligned}\int_0^3 f &= 5 + 4 \\ &= 9.\end{aligned}$$

Les intervalles se suivent sans chevauchement supplémentaire.

Sur $[0;2]$, la linéarité donne $\int_0^2 (3f - 1) = 3\int_0^2 f - \int_0^2 1$. Le premier terme vaut 15 ; le second est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et largeur 2, donc 2.

Le résultat est 13. Soustraire simplement 1 aurait oublié que la constante contribue sur toute la largeur de l'intervalle.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une intégrale nulle ne signifie pas forcément que la fonction est nulle. Des contributions positives et négatives peuvent s'annuler.