Équations différentielles

Terminale STI2D · spécialité maths · Chapitre 04

Vérifier une équation différentielle

Définition · Comprendre la notion

Une équation différentielle relie une fonction inconnue et sa dérivée. Dans $y' = ay + b$, a et b sont des constantes, mais y est une fonction du temps ou de la variable. Pour vérifier qu'une fonction est solution, calcule sa dérivée puis calcule séparément $ay + b$. Les deux expressions doivent être égales pour tout point de l'intervalle, pas seulement à une valeur. Une condition initiale comme $y(0) = y_0$ ajoute une contrainte de valeur. Une solution d'équilibre est constante : sa dérivée est nulle. Si $a \neq 0$, l'équilibre vaut $-b/a$. Ce vocabulaire relie l'équation à des modèles de refroidissement, de charge ou de croissance.

Résoudre y' = ay

Définition · Comprendre la notion

Les solutions de $y' = ay$, avec a constant, sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. La dérivation redonne $aCe^{at} = ay$. Si a = 0, les solutions sont constantes, ce que la formule retrouve avec $e^0 = 1$. Si $y(0) = y_0$, alors $C = y_0$. Pour a < 0, toute solution tend vers zéro en temps positif ; pour a > 0, une solution de valeur initiale positive croît exponentiellement. Une valeur initiale négative conserve son signe et ne décrit pas une population positive. L'équation signifie que le taux de variation est proportionnel à la quantité présente. Vérifie que cette hypothèse correspond au contexte du modèle.

Résoudre y' = ay + b

Définition · Comprendre la notion

Si $a \neq 0$, pose l'équilibre $L = -b/a$. La fonction $z = y - L$ vérifie $z' = az$. Toutes les solutions sont donc

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{at} + L \\ &= Ce^{at} - b/a. \end{aligned}$$

La constante L n'est pas une constante arbitraire : elle est fixée par l'équation. C reste à déterminer avec une condition initiale. Si a < 0, l'exponentielle tend vers zéro et y tend vers l'équilibre L. La solution s'en rapproche par au-dessus si C > 0 et par en-dessous si C < 0. Si a = 0, l'équation devient $y' = b$ et les solutions sont $bt + C$: la formule avec division par a ne doit pas être utilisée.

Condition initiale et interprétation du modèle

Définition · Comprendre la notion

Pour $y' = ay + b$, $a \neq 0$, avec $y(0) = y_0$, la solution est $y(t) = (y_0 - L)e^{at} + L$, où $L = -b/a$. Si la condition est donnée à t_0 au lieu de zéro, écris plus directement $y(t) = (y_0 - L)e^{a(t-t_0)} + L$. L'exponentielle vaut alors 1 au temps initial choisi. Une fois la constante calculée, interprète le signe de la dérivée, la limite et les unités. Un seuil doit être compatible avec la valeur initiale et l'équilibre. Une température qui décroît de 80 vers 20 n'atteint pas 10 dans ce modèle.

Approcher une solution différentielle par Euler

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour $y' = ay + b$, la pente dépend de la valeur actuelle y. Au pas h, Euler donne $t_{n+1} = t_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$. La formule utilise l'ancienne valeur y_n dans tout le membre droit. Dans un tableur, chaque ligne dépend de la précédente. En Python, calcule la nouvelle valeur après avoir évalué la pente courante. La suite approchée n'est pas la solution exacte. Un pas trop grand peut créer des oscillations artificielles : pour $y' = -ky$, la mise à jour multiplie par $1 - kh$, qui devient négatif si $kh > 1$. Compare plusieurs pas et le comportement attendu du modèle ; si la formule exacte est connue, elle sert de référence.

Les repères essentiels

Vérifier une équation différentielle.

1. Identifie l'équation et la fonction proposée.
2. Calcule sa dérivée.
3. Remplace séparément y dans le membre droit.
4. Compare les expressions sur tout l'intervalle.
5. Vérifie à part une condition initiale ou impose une dérivée nulle pour un équilibre.

Résoudre y' = ay.

1. Reconnais la forme $y' = ay$ et lis le coefficient a.
2. Écris la famille $C\mathrm{e}^{at}$.
3. Utilise la condition initiale pour calculer C si elle est donnée.
4. Contrôle la dérivée et la valeur initiale.
5. Interprète signe, variations et limite selon a et C.

Résoudre y' = ay + b.

1. Identifie a et b ; traite séparément le cas $a = 0$.
2. Pour $a \neq 0$, calcule l'équilibre $L = -b/a$.
3. Écris $y(t) = C\mathrm{e}^{at} + L$.
4. Utilise une condition pour déterminer C si nécessaire.
5. Vérifie l'équation et distingue l'équilibre fixé de la constante libre.

Condition initiale et interprétation du modèle.

1. Calcule l'équilibre et écris la famille des solutions.
2. Utilise le temps initial exact, qui n'est pas forcément zéro.
3. Détermine l'écart initial à l'équilibre.
4. Contrôle la dérivée et la valeur imposée.
5. Avant un seuil, vérifie sa compatibilité avec les variations et la limite.

Approcher une solution différentielle par Euler.

1. Initialise le temps et la valeur à partir de la condition donnée.
2. Calcule la pente $ay_n + b$ avec l'ancienne valeur.
3. Ajoute à y_n le produit de cette pente par h.

4. Avance le temps et recommence avec la nouvelle valeur.
5. Contrôle le comportement et compare les pas au même temps final.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Pour $y' = -2y + 6$, on cherche d'abord $0 = -2L + 6$, d'où $L = 3$. L'écart $z = y - 3$ vérifie $z' = -2z$.
>
> Les solutions sont donc $y(t) = C\mathrm{e}^{-2t} + 3$. En dérivant, on obtient $-2C\mathrm{e}^{-2t}$; en calculant $-2y + 6$, les constantes -6 et +6 se compensent et donnent le même résultat.
>
> Si C est positif, la solution est au-dessus de 3 et décroît vers 3. Si C est négatif, elle est en dessous et croît vers 3. Pour C nul, elle reste exactement à l'équilibre.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Tester une équation différentielle à un seul instant ne la vérifie pas. Les deux expressions doivent être égales pour tout point de l'intervalle.